

Il calcolatore analogico di GAU: moltiplica, divide, eleva al quadrato ed estrae radici



clicca per ingrandire

Introduzione

Il regolo calcolatore è sempre stato il simbolo distintivo di ogni vero ingegnere, più o meno come il tamburo per lo sciamano. Col tempo sono arrivati sulle scrivanie i computers da tavolo, le calcolatrici tascabili e i PC, ma il fascino iniziatico del regolo è rimasto insuperato.

Recentemente ho avuto modo di leggere su una vecchia rivista, custodita da un conoscente più gelosamente di un codice leonardesco, un articolo che descriveva un calcolatore analogico. La rivista era il numero di luglio del 1968 di Sperimentare e l'articolo aveva il titolo "Archimede, calcolatore elettronico".

Ho fatto qualche ricerca in rete ma oltre a numerosi articoli sul calcolo analogico simulato con componenti elettronici non ho trovato nulla di così semplice: ritengo utile riproporre il circuito perché estremamente interessante. Nella documentazione ho inserito una foto dello schema originale fatta con il cellulare mentre il truce bibliotecario era distratto.

Ripeto che l'idea non è assolutamente mia e rivolgo un rispettoso riconoscimento all'autore dell'articolo, del quale purtroppo sono riportate le sole iniziali "GAU", per le geniali soluzioni adottate in un circuito di rara eleganza nella sua semplicità.

Cosa fa il calcolatore analogico di GAU

Con una pila da 9 Volt, tre potenziometri, uno microamperometro e poco altro, esegue addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni, quadrati e radici quadrate di numeri

compresi da zero a dieci con la precisione di una cifra dopo la virgola. Ha tre quadranti graduati per impostare i numeri sui quali effettuare i conti e leggere il risultato.

Pietra angolare del circuito è l'indipendenza dei risultati dei calcoli dalla tensione della batteria: si può andare da 1,5 a 18 V volt senza problemi.

Nel realizzarlo ho eliminato il deviatore che consente somme e sottrazioni, operazioni non presenti nei regoli calcolatori, perché tali operazioni necessitano di una pila aggiuntiva con tensione assolutamente identica a quella principale: i risultati non sarebbero costanti nel tempo. Ho invece aggiunto la possibilità di aumentare la precisione delle operazioni di divisione qualora il quoziente sia maggiore di 10: senza tale accorgimento il calcolatore avrebbe usato solo un decimo della corsa utile di un potenziometro. È un piccolo "retrofit" che migliora solo marginalmente il progetto originale.

Operazioni su tutti i numeri

Il calcolatore di GAU lavora su numeri fra 0 e 10 con due cifre significative.

E se devo moltiplicare 2.456 per 435.469?

Il trucco sta nel riportare i fattori da moltiplicare a numeri in notazione esponenziale e calcolare separatamente la parte frazionaria normalizzata (o mantissa) e l'esponente (o caratteristica) del risultato.

Non dite che non sapete di cosa si parli, altrimenti come fate a calcolare la costante di tempo di un NE555 con un condensatore da 6,8 nanofarad e una resistenza da 120 K? Le mantisse sono 6,8 e 1,2 mentre gli esponenti sono (-9) e (+5).

Prima dell'avvento delle calcolatrici tascabili tutti i progettisti del mondo hanno lavorato col regolo calcolatore in questo modo, meditate gente!

la moltiplicazione $2.786 \times 432.469 = ????$

$$2.786 = 2,8 * 10^3$$

$$432.469 = 4,3 * 10^5$$

$$2,8 * 4,3 * 10^{(3 + 5)} = 12 * 10^8 = 1.200.000.000 \quad (\text{valore esatto } 1.204.858.634)$$

la divisione $75.826 / 471 = ???$

$$75.826 = 76 * 10^3$$

$$471 = 4,7 * 10^2$$

$$76 / 4,7 * 10^{(3-2)} = 16 * 10^1 = 160 \quad (\text{valore esatto } 160,9893843)$$

Il quadrato $6.521^2 = ????$

Il quadrato è la moltiplicazione di un numero per se stesso

$$6.521 = 6,5 * 10^3$$

$$6,5 * 6,5 * 10^{(3 * 2)} = 42 * 10^6 = 42.000.000 \quad (\text{valore esatto } 42.523.441)$$

La radice quadrata $\text{radq}(264.247) = ???$

la radice quadrata $\langle a \rangle$ di un numero $\langle b \rangle$ è il numero $\langle a \rangle$ che moltiplicato per se stesso da il numero $\langle b \rangle$

$264.247 = 26 \times 10^4$ (il numero va scritto con l'esponente PARI !)

$\text{radq}(26 \times 10^4) = \text{radq}(26) \times 10^{(4/2)} = 5,1 \times 10^2 = 510$ (valore esatto di 514,0496)

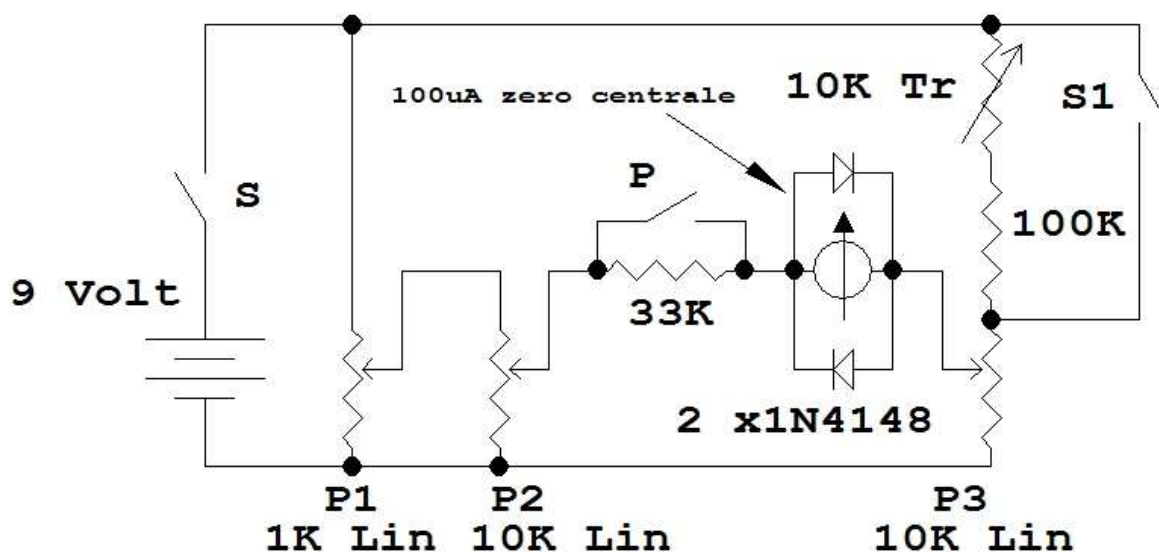
La precisione dei risultati

La precisione teorica dei conti fatti con i numeri arrotondati a due cifre significative è in media dell'1,2% (nel 10% dei casi scende al 2,5%). Quanto detto vale per valori che si trovano oltre il 10% delle scala di lettura (1,0 per il fondo scala di 10e 10 per il fondo scala di 100). Usando il primo 10% delle scale, la precisione scende molto: è proprio per motivi analoghi a questo che i testi consigliano di effettuare misure sempre vicino al fondo scala degli strumenti.

Mettiamo in conto la non linearità dei potenziometri dovute ai carichi, il disallineamento delle scale, la tolleranza delle corse, i giochi dei perni, le approssimazioni di lettura e altro ancora. Per prudenza peggioriamo il risultato di quattro volte (come usano fare gli ingegneri che progettano ponti), abbiamo pur sempre una precisione vicina al 5%. Mi sembrano valori interessanti considerando che gran parte dei componenti ha una tolleranza nominale del 10% (ad esempio i resistori e condensatori della serie E12): nei calcoli in elettronica, a parte rare eccezioni, una precisione superiore al 5% è inutile.

Il circuito

Il cuore è costituito dai tre potenziometri e dal microamperometro. Gli altri componenti sono banali accessori.



Rispetto allo schema originale ho aggiunto il trimmer da 10K, la resistenza da 100K e l'interruttore S1 che in posizione "aperto" moltiplica per 10 la scala di lettura di P1. Ho invece eliminato la batteria ausiliaria per le somme e le sottrazioni con il relativo deviatore.

Come funziona

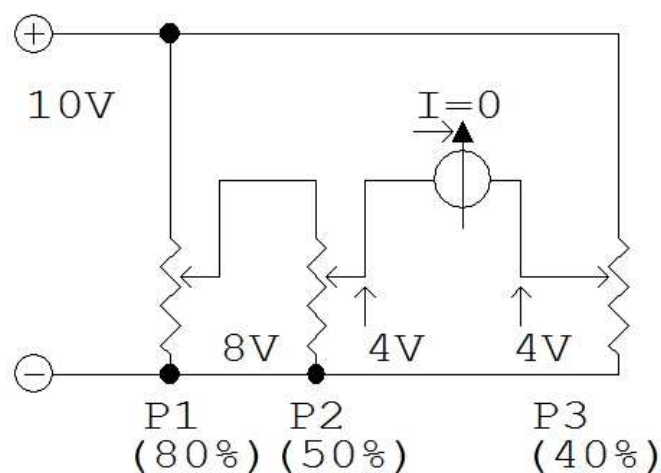
Vogliamo moltiplicare 8 per 5.

Per la spiegazione usiamo una batteria da 10 Volt, così i conti sono più intuitivi.

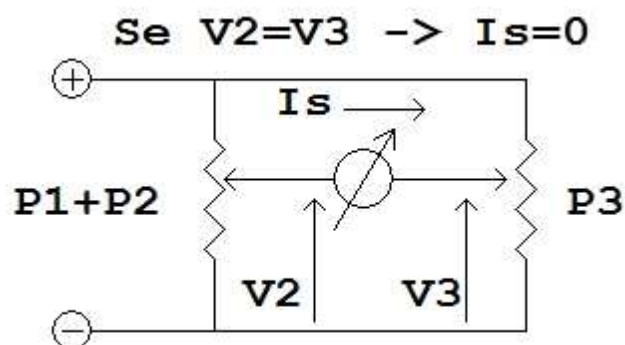
La batteria alimenta il potenziometro a variazione lineare P1, graduato in 10 divisioni e posizionato all' 80% della corsa: alla sua uscita abbiamo una tensione di $10 \times 0,8 = 8$ Volt che alimenta il potenziometro P2.

Il potenziometro lineare P2, graduato su 10 divisioni, è posizionato al 50% della corsa e alla sua uscita abbiamo una tensione di $8 \times 0,5 = 4$ Volt.

Se non consideriamo gli zeri e le virgole, tale tensione coincide con il prodotto delle posizioni dei potenziometri P1 e P2: dobbiamo leggere questa tensione in qualche modo.



Alla batteria è collegato il potenziometro P3. Alla sua uscita abbiamo una tensione proporzionale alla posizione del cursore. Se la sua scala è divisa in 100 graduazioni allora posizionandolo su <40> avremo 4 Volt in uscita.



Per verificare che le due tensioni siano effettivamente uguali si controlla che nel microamperometro a zero centrale non scorra corrente; a strumento azzerato abbiamo questa situazione:

	scala	posizione	rapporto di partizione	tensione in uscita
P1	0- 10	8	0.8	10 x 0.8 = 8 V
P2	0- 10	5	0.5	8 x 0.5 = 4 V
P3	0-100	40	0.4	10 x 0.4 = 4 V

Quindi leggendo gli indicatori sulla scale dei potenziometri abbiamo

$$8 \times 5 = 40$$

Questo risultato vale sempre, qualunque sia la tensione della batteria: basta impostare i fattori da moltiplicare su P1 e P2, azzerare lo strumento regolando P3 e leggere il risultato su P3. I due potenziometri di sinistra P1 e P2 “effettuano la moltiplicazione” e, azzerato lo strumento, il potenziometro di destra P3 “legge il risultato”: dire che il calcolatore di GAU sia geniale è dire poco.

Il mio retrofit per la divisione

Se il quoziente è minore di 10 tutto bene, tuttavia nella metà dei casi esso è maggiore di 10. Quando questo accade per avere ugualmente un quoziente minore di 10 si deve posizionare il potenziometro P3 del dividendo nel primo 10% della scala. Come detto prima, questa è la zona a bassa precisione, ma con un piccolo accorgimento si può “moltiplicare per 10” la scala del potenziometro P1 del quoziente.

Ad esempio per $74.212 / 552 = ???$

$$74.212 = 74 * 10^3$$

$$552 = 5,5 * 10^2$$

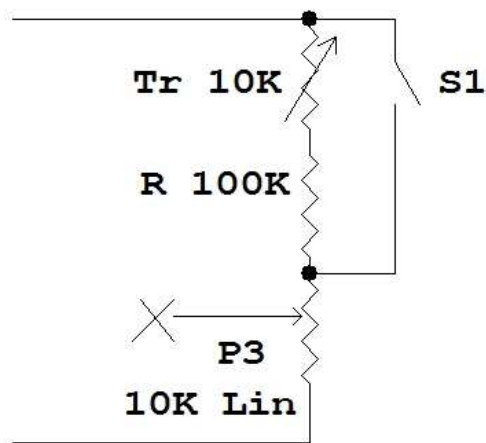
$$74 / 5,5 * 10^{(3-2)} = 13 * 10^1 = 130$$

il quoziente "normalizzato" è <13> superiore al fondo scala

Per azzerare lo strumento occorrerebbe impostare il dividendo come <7,4> (molto vicino all'inizio della scala) invece che come 74: il quoziente letto diventa <1,3>.

Per ovviare si inserisce in serie al potenziometro P3 una resistenza che riduca la tensione ai capi del potenziometro al 90% della tensione della batteria. A questo provvede il trimmer multigiri Tr da 10K e la resistenza R da 100K. Il valore teorico di (Tr+R) è pari a $9 * P1$, ma il valore necessario è più alto ed andrà regolato in fase di calibrazione.

S1 "aperto" P1=DIVx10



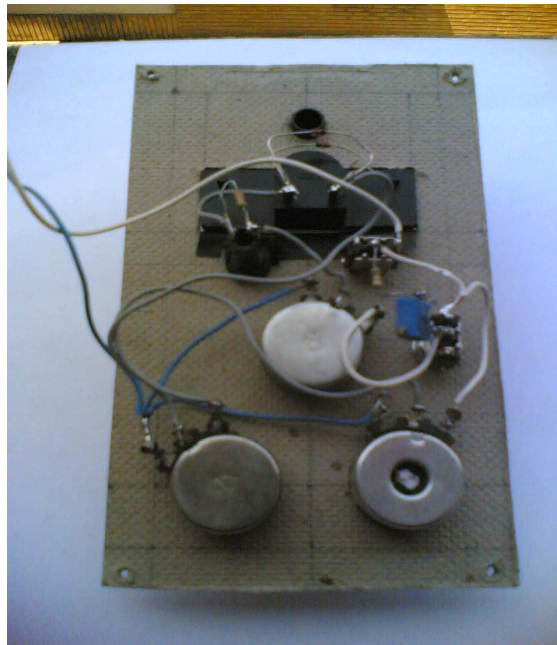
La scala di P3 viene "espansa" e il vecchio valore <7,4> ora è sulla posizione <74>; di conseguenza anche la scala di P1 (il quoziente) va moltiplicata per 10. In sintesi si imposta il dividendo (il potenziometro P3) su <74>, il divisore (potenziometro P2) su <5,5> e con l'interruttore S1 nella posizione "aperto" DIV x10 si legge il quoziente <13> sul potenziometro P1 moltiplicandone la scala per 10.

Qualche considerazione pratica

- La tensione della batteria, qualunque sia il suo valore e anche se varia nel tempo, non influisce sui risultati: è questa la chiave di volta del calcolatore di GAU
- i potenziometri devono essere a filo. La linearità nominale di questi componenti è di +/- 0.25% (un po' troppo ottimisti!)
- Il valore di P2 deve essere almeno 10 volte quello di P1: in tal modo la perdita di linearità di P1 dovuta al carico di P2 è del 2.5%
- il valore di resistenza dei potenziometri non influisce sui risultati
- con P1=1K, P2=10K, P3=10K ed una batteria di 9 Volt l'assorbimento totale è di circa 11 mA, meno di un led
- poiché si fa una "misura di zero" lo strumento non deve essere di alta qualità e nemmeno lineare, basta che sia sufficientemente sensibile
- Lo strumento è protetto dalla resistenza da 33K in serie che limita la corrente a circa 300 uA nel caso peggiore, i due diodi lo proteggono ulteriormente limitando la tensione a +/- 0.7 volt
- Il pulsante P cortocircuita la resistenza e consente di avere uno "zero" preciso sfruttando la massima sensibilità dello strumento, nulla di nuovo: erano così tutti i ponti a decadi.

Il montaggio

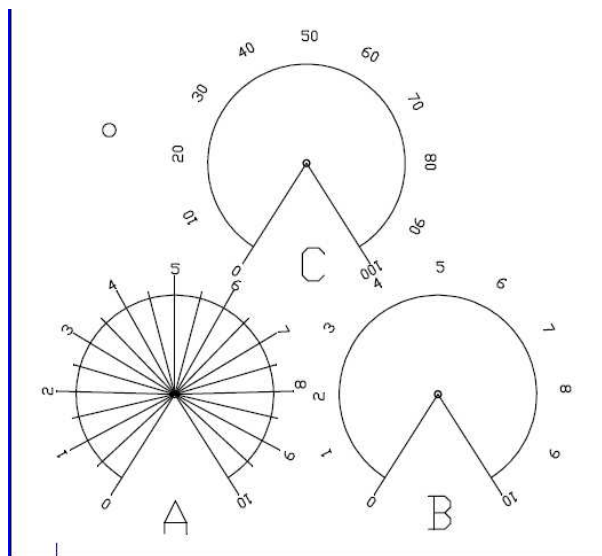
Alloggiando il calcolatore in una scatola plastica di 15 x 10 x 5 cm basta collegare con un cavetto isolato i terminali dei potenziometri, dello strumento e degli interruttori fissati sul pannello frontale. Nel prototipo ho impiegato una lastra di cartone pressato da usare successivamente come dima per il pannello finale in metallo.



Sulla destra in blu si vede il trimmer multigiri saldato sull'interruttore S. I fili che escono dal circuito vanno alla batteria.

I quadranti di lettura e la loro taratura

I potenziometri P1 e P2 ha una scala graduata da 0 a 10; il potenziometro P3 ha una scala graduata 0 a 100.



Per disegnare i quadranti si può ricorrere ad un software di disegno: io ho usato ProgeCAD2009Smart che viene rilasciato free per uso strettamente non commerciale. L'ho usato anche per disegnare la bozza del pannello frontale.

Il quadrante di P1 va disegnato con le suddivisioni regolarmente spaziate, mentre quello di P2 e P3 riporterà solo l'arco con il segno di inizio e di fine corsa: le suddivisioni si faranno a mano nel corso della calibrazione.

La calibrazione dei quadranti di lettura

L'articolo originale consiglia di calibrare a mano le scale dei potenziometri perché in tal modo si correggono molti errori sistematici. E' sufficiente la calibrazione per la moltiplicazione.

La procedura va eseguita con l'interruttore S1 in posizione "chiuso" DIV x1.

a) calibratura della scala del potenziometro P1

la scala resta quella "geometrica" con le tacche da 0 a 10 e le suddivisioni ugualmente spaziate in passi da 0,1.

Verificate preventivamente l'effettiva ampiezza di rotazione di P1 per allocare le divisioni su tutto l'arco utile.

b) calibratura della scala del potenziometro P3

- 1) portare il potenziometro P2 a fondo scala sulla divisione <10>
- 2) portare il potenziometro P1 sulla divisione <0,5>
- 3) regolare il potenziometro P3 fino ad azzerare lo strumento
- 4) regolare il potenziometro P3 col tasto P premuto fino ad azzerare lo strumento
- 5) segnare sulla scala del potenziometro P3 il valore <5>
- 6) ripetere le operazioni da 2) a 4) per tutti i valori di P1 a passi di 0,5 da <1,0> a <10> segnando i corrispondenti punti su P3 da <10> a <100> in passi da <5>
- 7) ora la scala di P3 è calibrata su 20 punti <0-5-10-15...95-100>.

c) calibratura della scala del potenziometro P2

- 1) portare il potenziometro P1 a fondo scala sulla divisione <10>
- 2) portare il potenziometro P3 sulla divisione <5> precedentemente segnata
- 3) regolare il potenziometro P2 fino ad azzerare lo strumento
- 4) regolare il potenziometro P2 col tasto P premuto fino ad azzerare lo strumento
- 5) segnare sulla scala del potenziometro P2 il valore <0,5>
- 6) ripetere le operazioni da 2) a 4) per tutti i valori di P3 a passi di 5 da <10> a <100> segnando i corrispondenti punti su P2 da <1> a <10> in passi da <0.5>
- 7) ora la scala di P2 è calibrata su 20 punti <0-0,5-1,0-1,5...9.5-10.0>.

Le ulteriori suddivisioni a passi di 0,1 per P2 e a passi di 1 per P3 possono essere fatte a mano senza perdere eccessivamente in linearità.

La calibrazione del retrofit

- 1) posizionare l'interruttore S1 in posizione "aperto" DIVx10
- 2) usando le scale già calibrate, impostare su P1 il valore <3>, su P2 il valore <3>, su P3 il valore <90>
- 3) collegare un voltmetro digitale al terminale centrale di P2
- 4) premere il pulsante P, leggere ed annotare il valore esatto di V_{p2} (es: 0,760 Volt o quel che è)
- 5) collegare il voltmetro digitale al terminale centrale di P3

- 6) premere il pulsante P e leggere la tensione V_{p3}
- 7) con il pulsante P premuto regolare il trimmer Tr finchè V_{p3} sia esattamente uguale a V_{p2} (es: 0,760 Volt +/- 0.01)
- 8) posizionare l'interruttore S1 in posizione "chiuso" DIVx1
- 9) ora la scala DIVx10 di P1 è calibrata

Il procedimento sembra astruso, ma è solo una misura di "zero". Partendo da una posizione di equilibrio nota ($30 \times 3 = 90$) su scale già calibrate, si eguagliano le tensioni corrispondenti. Non è possibile fare tale "zero" col microamperometro del calcolatore perchè non è abbastanza sensibile:

Il calcolatore è pronto: come si usa?

Preparazione dei dati

Come detto occorre portare tutti i dati in notazione esponenziale nella forma

potenziometro P1 e P2 “Unità, Decimale” x $10^{\text{“esponente”}}$ es: $4,3 \times 10^5$

potenziometro P3 “Decine-unità” X $10^{\text{“esponente”}}$ es: 33×10^2

In poco tempo ci si fa la mano.

Moltiplicazione

assicurarsi che l'interruttore S1 sia "chiuso", posizione DIV x1

Impostare il primo fattore su P1 (Unità, Decimale)

Impostare il secondo fattore su P2 (Unità, Decimale)

Regolare P3 per azzerare lo strumento

Premere P e P3 per azzerare in modo fine lo strumento

Leggere il risultato su P3 (Decine-Unità)

Sommare gli esponenti

Divisione

assicurarsi che l'interruttore S1 sia "chiuso", posizione DIV x1

Impostare il dividendo su P3 (Decine-Unità)

Impostare il divisore su P2 (Unità, Decimale)

Regolare P1 per azzerare lo strumento

Se lo strumento non si azzerà: spostare l'interruttore S1 in posizione "aperto" DIV x10

Regolare P1 per azzerare lo strumento

Premere P e regolare P1 per azzerare in modo fine lo strumento

Leggere il risultato su P1

a) se S1 è su DIV x1 leggere (Unità, Decimale)

b) se S1 è su DIV x10 leggere (Decine.Unità)

assicurarsi di riportare sempre l'interruttore in posizione "chiuso" DIV x1

Sottrarre gli esponenti

Elevazione al Quadrato

assicurarsi che l'interruttore S1 sia "chiuso", posizione DIV x1

Impostare il numero del quale calcolare il quadrato su P1 (Unità, Decimale)

Impostare il numero del quale calcolare il quadrato su P2 (Unità, Decimale)
Fare attenzione a che le posizioni di P1 e P2 siano il più possibile uguali
Regolare P3 per azzerare lo strumento
Premere P e regolare P3 per azzerare in modo fine lo strumento
Leggere il risultato su P3 (Decine-Unità)
Moltiplicare per due l'esponente

Estrazione di Radice quadrata

Attenzione: l'esponente deve essere un numero PARI
234.534 va scritto come 23×10^4 e NON come $2,3 \times 10^5$

assicurarsi che l'interruttore S1 sia "chiuso", posizione DIV x1

Impostare il numero del quale estrarre la radice quadrata su P3 (Decine-Unità)
Regolare P1 e P2 sullo stesso valore per azzerare lo strumento (Unità, Decimale)
Fare attenzione a che le posizioni di P1 e P2 siano il più possibile uguali fra loro
Premere P e regolare ancora P1 e P2 in modo fine per azzerare lo strumento
Fare attenzione a che le posizioni di P1 e P2 siano il più possibile uguali fra loro
Leggere il risultato su P1 (Unità, Decimale)
Dividere per due l'esponente

I primi "conti" con il calcolatore di GAU

Le scale del prototipo erano disegnate con suddivisioni solo ogni 0,5 punti per P1 e P2 e ogni 5 punti per P3, corrispondenti ai 20 punti di taratura: il resto l'ho stimato ad occhio.

Ho passato una serata a fare un bel po' di conti con moltiplicazioni, divisioni, quadrati e radici. I risultati hanno dato una precisione sui risultati compresa fra il 4% ed il 6%. Ho poi fatto fare le operazioni alle mie aiutanti e la precisione è salita al 2% - 3%, il che conferma l'importanza di un buon posizionamento delle manopole e di una buona stima delle letture.

I risultati sono coerenti con le ipotesi che prevedevano una precisione del 5%, sicuramente disegnando tutte e 100 le suddivisioni sulle scale si può migliorare scendendo sotto il 2%. Direi di essere più che soddisfatto!

Come funziona: qualche formula in più

1) La tensione all'uscita di un potenziometro R_a+R_b caricato da una resistenza R_c è

$$V_{out} = \frac{R_b \times R_c}{R_a \times R_c + R_b \times R_c + R_a \times R_b} \times V_{batt}$$

Se R_c è abbastanza maggiore di R_a ed R_b avremo la nota formula

$$V_{out} = \frac{R_b}{R_a + R_b} \times V_{batt}$$

Che possiamo scrivere come

$V_{out} = K \times V_{batt}$, dove K è il rapporto di partizione che va da 0 ad 1

2) All'uscita della prima sezione del potenziometro P1 abbiamo una tensione pari a

$$V1 = V_{batt} \times K1$$

che alimenta il potenziometro P2

3) All'uscita del potenziometro P2 abbia una tensione pari a

$$V2 = V1 \times K2 = V_{batt} \times K1 \times K2$$

che va ad un capo del microamperometro

4) All'uscita del potenziometro P3 la tensione sarà

$$V3 = V_{batt} \times K3$$

che va all'altro capo del microamperometro

5) il circuito è una estrema semplificazione del metodo di misura "potenziometrica" : si eguagliano le tensioni di due nodi verificando che non scorra corrente fra essi. P1 e P2 generano la tensione incognita mentre P3 genera la tensione nota

In tale condizione di "zero corrente" $V3 = V2$

e quindi in base ai punti 3) e 4)

$$V_{batt} \times K1 \times K2 = V2 = V3 = V_{batt} \times K3$$

6) dividiamo tutto per V_{batt} (si può fare perchè V_{batt} è diversa da zero) facendola sparire dalla formula: è questo il motivo per cui la tensione della batteria è influente. Finalmente si ottiene:

$$K1 \times K2 = K3$$

“E che mi sta a significare?”, direbbe Camilleri, questo sta a significare:

Visto che i potenziometri sono lineari e che le tensioni di uscita corrispondono alla posizione dei cursori allora

$$\text{Posizione (P1)} \times \text{Posizione (P2)} = \text{Posizione (P3)}$$

Il calcolatore di GAU ha effettuato la moltiplicazione.

Inoltre se $K1 \times K2 = K3$ allora $K1 = K3 / K2$, quindi basta posizionare gli indici dei potenziometri P3 e P2, azzerare il ponte con lo strumento e leggere il risultato sull'indice del potenziometro P1 per avere il risultato della divisione.

$$\text{Posizione (P1)} = \text{Posizione (P3)} / \text{Posizione (P2)}$$

Il calcolatore di GAU ha effettuato la divisione.

"Forse tu non pensavi ch'io loico fossi" disse il buon demone.

Possibili sviluppi

- collegare amplificatori operazionali "inseguitori" all'uscita di tutti i potenziometri
- utilizzare un potenziometro doppio, con gli operazionali, per il quadrato e la radice
- utilizzare potenziometri multigiri con le loro costose manopole a contatore
- sostituire lo strumento con un amplificatore operazionale con due led sull'uscita
- disegnare scale che leggano direttamente $X_c = 1 / (2 \pi \times f \times C)$ e $X_l = 2 \times \pi \times f \times L$
- ecc, ecc

La lista dei componenti

nr. 1 Potenziometro lineare a filo da 1K 5W
nr. 2 Potenziometro lineare a filo da 10K 5W
nr. 1 Microamperometro a zero centrale da 100uA
nr. 2 Diodo 1N4148
nr. 1 Resistenza da 33K ¼ W
nr. 1 Resistenza da 100K ¼ W
nr. 1 trimmer multigiri 10K
nr. 1 Pulsante
nr. 2 Interruttori
nr. 1 Pila da 9 Volt
nr. 3 Manopole con indice
nr. 1 Contenitore

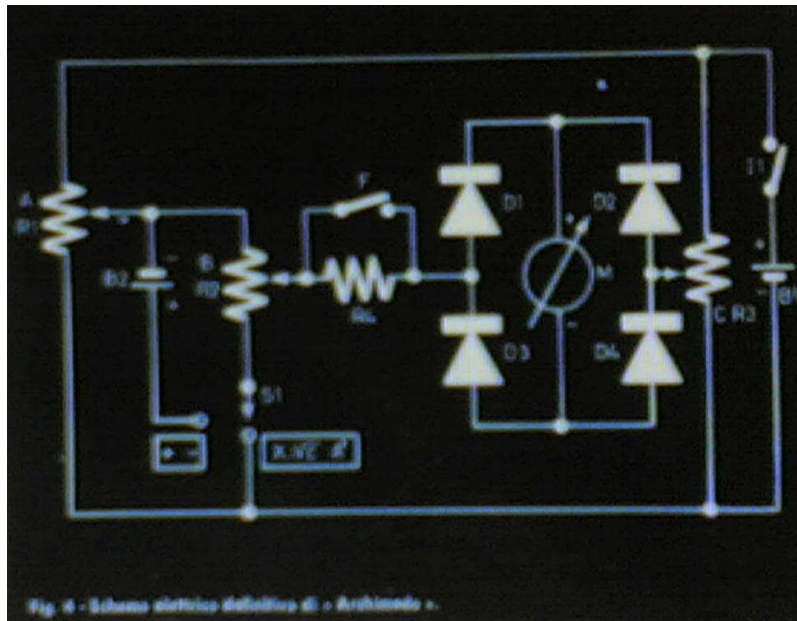
I I costi stimati

I tre potenziometri	18 euro
Il microamperometro	10 euro
pulsante, interruttori, manopole	2 euro
diodi, resistenze, trimmer	2 euro
La scatola	3 euro
Totale	35 euro

La reperibilità dei componenti

Direi che non ci sono problemi

Una foto dello schema originale del 1968



Si noti il deviatore in basso a sinistra che mette in serie a P1 la batteria ausiliaria partizionata da P2: serve per addizioni e sottrazioni. Era suggerito l'impiego alternativo di un microamperometro senza zero centrale con un ponte di diodi al germanio: era il 1968!

La documentazione

l'articolo di GAU Sperimentare, luglio 1968: "Archimede, calcolatore elettronico"
progeCad2009 smart <http://www.progesoft.com/en/smart-2009>
calcolo analogico <http://www.electroportal.net/g.schgor/wiki/articolo11>
Calcolatori analogici <http://www.tecnoteca.it/museo/05>
Analog computers http://en.wikipedia.org/wiki/Analog_computer

Conclusione

Si dirà: ma serviva davvero tutto questo ambaradan visto che una calcolatrice che fa i conti con otto cifre costa un paio di euro? E' vero, ma si dice lo stesso anche del sestante visto che c'è il GPS e del CW adesso che ci sono i cellulari anche a Ngorongoro. Forse userò il calcolatore analogico di GAU solo una volta ogni tanto, come del resto faccio con la mia bussola astrale e con il mio sestante a bolla d'aria, ma mi sono divertito moltissimo a calcolare una radice quadrata con tre potenziometri.