*В.А.Епанечников*
*А.Н.Цветков*

# СПРАВОЧНИК

## *по прикладным программам для* МИКРО-*калькуляторов*

*В.А.Епанечников*
*А.Н.Цветков*

# СПРАВОЧНИК

## *по прикладным программам для микрокалькуляторов*



*Москва*
*"Финансы и статистика"*
*1988*

ББК 32.973—01
Е65

УДК 681.321.069

Рецензент: канд. физ.-мат. наук Ю. Б. Котов

**Епанечников В. А., Цветков А. Н.**

Е65 Справочник по прикладным программам для микрокалькуляторов. — М.: Финансы и статистика, 1988. — 320 с.
ISBN 5-279-00118-X

В книге авторов, известных читателям по работам о программируемых микрокалькуляторах, предлагается широкий набор программ, реализующих численные методы решения математических, технических и экономико-статистических задач. Наибольшее внимание уделяется статистическим методам обработки данных. Представленные программы охватывают все типы программируемых отечественных микрокалькуляторов.

Для специалистов, обладающих разными по уровню навыками работы с программируемыми микрокалькуляторами.

Е $\frac{2405000000—17}{010(01)—88}$ 112—88 ББК 32.973—01

Справочное издание

**Виктор Александрович Епанечников**
**Алексей Николаевич Цветков**

**СПРАВОЧНИК ПО ПРИКЛАДНЫМ ПРОГРАММАМ ДЛЯ МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРОВ**

Зав. редакцией *И. Г. Дмитриева*. Редактор *Т. А. Петрова*
Мл. редакторы *А. А. Емельянова, Т. А. Студеникина*
Худож. редактор *С. Л. Витте*. Техн. редактор *Л. Г. Челышева*
Корректоры *Г. А. Башарина, С. Г. Мазурина, Е. В. Люминарская* и *М. М. Виноградова*
Переплет художника *В. К. Бисенгалиева*

ИБ № 2123

Сдано в набор 18.09.87. Подписано в печать 25.12.87. А-04631. Формат 60×88 1/16. Бум. кн.-журн. офсетная. Гарнитура «Литературная». Печать офсетная. Усл. п. л. 19,6. Усл. кр.-отт. 19,6. Уч.-изд. л. 21,63. Тираж 40 000 экз. Заказ 681. Цена 1 р. 40 к.

Издательство «Финансы и статистика»,
101000, Москва, ул. Чернышевского, 7.
Московская типография № 4 Союзполиграфпрома
при Государственном комитете СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
129041, Москва, Б. Переяславская ул., 46.

ISBN 5-279-00118-X

© Издательство «Финансы и статистика», 1988

# ВВЕДЕНИЕ

Авторам в своей повседневной деятельности приходилось оказывать помощь в работе на микрокалькуляторах людям самых разных профессий. Сформировавшийся в процессе этой работы круг наиболее, на наш взгляд, интересных для пользователей вопросов рассмотрен в данной книге.

Для работы со справочником достаточно ознакомиться с инструкцией по эксплуатации используемого микрокалькулятора [1—5].

*Принятые обозначения.*

1. В книге приведены программы для различных микрокалькуляторов. Указанием на обобщенный тип машины, для которой написана программа, служит набор чисел, отделенных от номера программы или инструкции косой чертой. Так, IV. 2.5.1/52 означает реализацию для микрокалькулятора «Электроника» МК-61 и МК-52; III.1.1.1/21 — для Б3-21; II.2.2.1/54 — для Б3-34, МК-56, МК-54; V.4.4/54,52 — для всех, кроме Б3-21; V.1.1/21,54,52 — для всех калькуляторов.

2. Обозначения некоторых операций с целью унификации заменены: для Б3-21

| Обозначение | Код | Операция |
|---|---|---|
| P, | 43 | Кольцевое передвижение информации в стеке — по часовой стрелке |
| P/—/ | 53 | То же — против часовой стрелки |
| ↔ | 16 | Обмен содержимым регистров X и Y |

для остальных машин

| Обозначение | Код | Операция |
|---|---|---|
| П→x N | 6N | Вызов в регистр X содержимого регистра N |
| К П→x N | ГN | Вызов в регистр X из регистра с модифицированным адресом |
| x→П N | 4N | Пересылка содержимого регистра X в регистр N |
| К x→П N | LN | Пересылка содержимого регистра X по модифицируемому адресу |
| B↑ | 0E | Пересылка содержимого регистра X в регистр Y |
| $F\sin^{-1}$ | 19 | Вычисление arcsin |

*Продолжение*

| Обозначение | Код | Операция |
|---|---|---|
| $F\cos^{-1}$ | 1— | Вычисление arccos |
| $F\,\mathrm{tg}^{-1}$ | 1L | Вычисление arctg |
| $F.$ | 25 | Кольцевое передвижение информации в стеке |
| ↔ | 14 | Обмен содержимым регистров X и Y |

В объединенных инструкциях используется обозначение В ↑ и для Б3-21.

*Работа с программами.* Описание программы содержит:

краткое пояснение;

алгоритм вычислений и расчетные формулы;

требования к подпрограммам (если они необходимы);

текст программы;

инструкцию по работе с программой (номер инструкции совпадает с номером программы);

таблицу занятости регистров памяти (регистры, не указанные в таблице, программой не используются);

оценку времени работы программы;

пример.

Предполагается, что читатель знаком с руководством по эксплуатации микрокалькулятора и умеет, если необходимо, составить и оформить подпрограмму вычисления значений конкретной функции.

Инструкции по работе с программой даются двух типов: полная, в виде таблицы, или краткая, когда требуется лишь ввести аргументы и выполнить команды В/О С/П. В краткой инструкции запись Р/Г в Р или Г означает установку переключателя «Радианы-Градусы» в положение «Радианы» или «Градусы». В полной инструкции в графе «Содержание» описаны действия пользователя, в графах «Набрать число» и «Выполнить команды» — операции, необходимые для осуществления этих действий. В графе «Результат» указаны только итоговые и важные промежуточные показания индикатора.

Безвременная кончина Алексея Николаевича Цветкова — инициатора книги, автора интересных идей и вдохновителя многих работ по программированию на микроЭВМ — затруднила работу над справочником. Поэтому весьма полезной была помощь, оказанная Н. А. Цветковым, который завершил ряд программ и раздел дискриминационного анализа.

# Глава I

# АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

## I.1. ПЕРЕВОД ЧИСЕЛ ИЗ ОДНОЙ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ В ДРУГУЮ

Приводятся программы для перевода положительных чисел из системы счисления с основанием m в систему счисления с основанием n (m; n $\leqslant$ 10). Для перевода из десятичной и в десятичную системы счисления используются единые программы.

В общем случае для перевода из системы счисления с основанием m в систему счисления с основанием n в программах используется перевод $N_m$ вначале в десятичную систему счисления $N_{10}$, а затем перевод $N_{10}$ в систему счисления с основанием n.

### I.1.1. ПЕРЕВОД ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

#### I.1.1.1. ПЕРЕВОД ИЗ ДЕСЯТИЧНОЙ И В ДЕСЯТИЧНУЮ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ (m=10 ИЛИ n=10)

Используется метод деления исходного числа $N_m$ последовательно на $n^i$ (i = 1,2, ...). Полученные в результате остатки от деления умножаются соответственно на $m^j$ (j = 0, 1, 2, ...) и складываются. В результате получаем число $N_n$ в системе счисления с основанием n [11].

Программа I.1.1.1/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | ↑ | 06 | 33 | + | 96 | 70 | × | 26 |
| 01 | 1 | 14 | 34 | ↔ | 16 | 71 | P 2 | 21 |
| 02 | P2 | 21 | 35 | — | 86 | 72 | P /—/ | 53 |
| 03 | Cx | 76 | 40 | P3 | 31 | 73 | ↑ | 06 |
| 04 | ↔ | 16 | 41 | ↑ | 06 | 74 | F 3 | 32 |
| 05 | ↔ | 16 | 42 | F5 | 52 | 75 | P x=0 | 59 |
| 10 | P, | 43 | 43 | × | 26 | 80 | ↑ | 06 |
| 11 | F5 | 52 | 44 | ↑ | 06 | 81 | ↔ | 16 |
| 12 | : | 36 | 45 | P/—/ | 53 | 82 | С/П | 78 |
| 13 | ↔ | 16 | 50 | ↔ | 16 | | | |
| 14 | P, | 43 | 51 | — | 86 | | Инструкция | |
| 15 | ↔ | 16 | 52 | ↑ | 06 | | | |

*Продолжение*

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 1 | 14 | 53 | F2 | 22 | m—в рег. 4 |
| 21 | , | 46 | 54 | × | 26 | n—в рег. 5 |
| 22 | 8 | 84 | 55 | ↑ | 06 | $N_m$ В/О С/П |
| 23 | F1/x | 45 | 60 | P /—/ | 53 | |
| 24 | — | 86 | 61 | + | 96 | Регистры |
| 25 | 1 | 14 | 62 | P , | 43 | |
| 30 | ВП | 66 | 63 | F 2 | 22 | 2; 3 оперативные |
| 31 | 7 | 74 | 64 | ↑ | 06 | 4 m |
| 32 | ↔ | 16 | 65 | F 4 | 42 | 5 n |

Программа I.1.1.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | П→x 0 | 60 | 14 | П→x 3 | 63 | 28 | С/П | 50 |
| 01 | F 1/x | 23 | 15 | П→x 1 | 61 | | | |
| 02 | x→П 2 | 42 | 16 | × | 12 | | Инструкция | |
| 03 | Cx | 0Г | 17 | — | 11 | | | |
| 04 | ↔ | 14 | 18 | П→x 2 | 62 | | m—в рег. 0 | |
| 05 | В↑ | 0Е | 19 | П→x 0 | 60 | | n—в рег. 1 | |
| 06 | П→x 1 | 61 | 20 | × | 12 | | $N_m$ В/О С/П | |
| 07 | : | 13 | 21 | x→П 2 | 42 | | | |
| 08 | 1 | 01 | 22 | × | 12 | | Регистры | |
| 09 | + | 10 | 23 | + | 10 | | | |
| 10 | x→П 3 | 43 | 24 | П→x 3 | 63 | | 0 m | |
| 11 | К П→x 3 | Г3 | 25 | F x=0 | 5Е | | 1 n | |
| 12 | F . | 25 | 26 | 05 | 05 | | 2; 3 оперативные | |
| 13 | F . | 25 | 27 | ↔ | 14 | | . | |

Программа I.1.1.1/52 может быть сокращена на 5 команд при замене команд с адресами 08—14 двумя командами К [x] x → П3. Время вычисления — 10—60 с.

*Примеры.*

1. Перевод из десятичной системы счисления m = 10, $N_{10}$ = 127, n = 4. $N_4$ = 1333.
2. Перевод в десятичную систему счисления m = 4, $N_4$ = 1333, n = = 10. $N_{10}$ = 127.

### I.1.1.2. ПЕРЕВОД ИЗ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ С ОСНОВАНИЕМ m В СИСТЕМУ СЧИСЛЕНИЯ С ОСНОВАНИЕМ n

Программа I.1.1.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | П→x A | 6— | 19 | П→x 0 | 60 | 38 | F . | 25 |
| 01 | 1 | 01 | 20 | : | 13 | 39 | П→x 3 | 63 |

*Продолжение*

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 02 | 0 | 00 | 21 | 1 | 01 | 40 | F x=0 | 5E |
| 03 | ПП | 53 | 22 | + | 10 | 41 | 18 | 18 |
| 04 | 10 | 10 | 23 | x→П 3 | 43 | 42 | ←→ | 14 |
| 05 | П→x 0 | 60 | 24 | К П→x 3 | Г3 | 43 | В/О | 52 |
| 06 | П→x B | 6L | 25 | F . | 25 | | | |
| 07 | ПП | 53 | 26 | F . | 25 | | Инструкция | |
| 08 | 10 | 10 | 27 | П→x 3 | 63 | | | |
| 09 | С/П | 50 | 28 | П→x 0 | 60 | | m—в рег. A | |
| 10 | x→П 0 | 40 | 29 | × | 12 | | n—в рег. B | |
| 11 | F . | 25 | 30 | — | 11 | | $N_m$ В/О С/П | |
| 12 | x→П 2 | 42 | 31 | П→x 1 | 61 | | | |
| 13 | F . | 25 | 32 | × | 12 | | Регистры | |
| 14 | 1 | 01 | 33 | + | 10 | | | |
| 15 | x→П 1 | 41 | 34 | П→x 1 | 61 | | 0—3 оперативные | |
| 16 | Cx | 0Г | 35 | П→x 2 | 62 | A | m | |
| 17 | ←→ | 14 | 36 | × | 12 | B | n | |
| 18 | B↑ | 0E | 37 | x→П 1 | 41 | | | |

Программа I.1.1.2/52 может быть сокращена на 5 команд при замене команд с адресами 21—27 двумя командами К [x] x → П3. Время вычисления — 0,5—2,5 мин.

*Пример.* m = 5, $N_5$ = 32, n = 2. $N_2$ = 10001.

## I.1.2. ПЕРЕВОД ДРОБНЫХ ЧИСЕЛ

### I.1.2.1. ПЕРЕВОД ИЗ ДЕСЯТИЧНОЙ И В ДЕСЯТИЧНУЮ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ (m=10 ИЛИ n=10)

Для перевода используется метод, состоящий в умножении исходного числа $N_m$ последовательно на значения $n^i$ ($i = 1, 2, ...$). Полученные в результате умножения целые числа делятся соответственно на $m^j$ ($j = 1, 2, ...$). В результате получаем число $N_n$ [11].

Программа I.1.2.1/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | ↑ | 06 | 33 | ←→ | 16 | 70 | ↑ | 06 |
| 01 | 1 | 14 | 34 | — | 86 | 71 | F 6 | 62 |
| 02 | P 5 | 51 | 35 | P 6 | 61 | 72 | — | 86 |
| 03 | ←→ | 16 | 40 | F 5 | 52 | 73 | ↑ | 06 |
| 04 | 8 | 84 | 41 | ↑ | 06 | 74 | F 7 | 72 |
| 05 | P 7 | 71 | 42 | F 2 | 22 | 75 | P x=0 | 59 |
| 10 | Cx | 76 | 43 | × | 26 | 80 | P ←→ | 13 |
| 11 | P , | 43 | 44 | P 5 | 51 | 81 | P /—/ | 53 |
| 12 | F 3 | 32 | 45 | ←→ | 16 | 82 | С/П | 78 |
| 13 | × | 26 | 50 | F 6 | 62 | | | |
| 14 | P 4 | 41 | 51 | ←→ | 16 | | Инструкция | |
| 15 | 1 | 14 | 52 | : | 36 | | | |

*Продолжение*

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 | , | 46 | 53 | ↑ | 06 |
| 21 | 8 | 84 | 54 | P /—/ | 53 |
| 22 | F 1/x | 45 | 55 | + | 96 |
| 23 | — | 86 | 60 | P , | 43 |
| 24 | 1 | 14 | 61 | F 7 | 72 |
| 25 | ВП | 66 | 62 | 1 | 14 |
| 30 | 7 | 74 | 63 | — | 86 |
| 31 | ←→ | 16 | 64 | P 7 | 71 |
| 32 | + | 96 | 65 | F 4 | 42 |

m—в рег. 2
n—в рег. 3
$N_m$ В/О С/П

Регистры

| | |
|---|---|
| 2 | m |
| 3 | n |
| 4—7 | оперативные |

Программа I.1.2.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | К НОП | 54 | 14 | П→х 2 | 62 |
| 01 | 1 | 01 | 15 | П→х 3 | 63 |
| 02 | х→П 3 | 43 | 16 | П→х 0 | 60 |
| 03 | Сх | 0Г | 17 | × | 12 |
| 04 | ←→ | 14 | 18 | х→П 3 | 43 |
| 05 | П→х 1 | 61 | 19 | : | 13 |
| 06 | × | 12 | 20 | + | 10 |
| 07 | х→П 4 | 44 | 21 | П→х 4 | 64 |
| 08 | 1 | 01 | 22 | П→х 2 | 62 |
| 09 | + | 10 | 23 | — | 11 |
| 10 | х→П 2 | 42 | 24 | F x=0 | 5E |
| 11 | К П→х 2 | Г2 | 25 | 05 | 05 |
| 12 | F . | 25 | 26 | ←→ | 14 |
| 13 | F . | 25 | 27 | С/П | 50 |

Инструкция

m—в рег. 0
n—в рег. 1
$N_m$ В/О С/П

Регистры

| | |
|---|---|
| 0 | m |
| 1 | n |
| 2—4 | оперативные |

Программа I.1.2.1/52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | К НОП | 54 | 11 | × | 12 |
| 01 | 1 | 01 | 12 | х→П 3 | 43 |
| 02 | х→П 3 | 43 | 13 | : | 13 |
| 03 | Сх | 0Г | 14 | + | 10 |
| 04 | ←→ | 14 | 15 | П→х 2 | 62 |
| 05 | П→х 1 | 61 | 16 | К {x} | 35 |
| 06 | × | 12 | 17 | F x=0 | 5E |
| 07 | х→П 2 | 42 | 18 | 05 | 05 |
| 08 | К [x] | 34 | 19 | ←→ | 14 |
| 09 | П→х 3 | 63 | 20 | С/П | 50 |
| 10 | П→х 0 | 60 | | | |

Инструкция

m—в рег. 0
n—в рег. 1
$N_m$ В/О С/П

Регистры

| | |
|---|---|
| 0 | m |
| 1 | n |
| 2—3 | оперативные |

Время вычисления — 5—60 с.

*Примеры.*

1. Перевод из десятичной системы счисления $m = 10$, $N_{10} = 0{,}46875$, $n = 4$. $N_4 = 0{,}132$.
2. Перевод в десятичную систему счисления $m = 4$, $N_4 = 0{,}132$, $n = 10$. $N_{10} = 0{,}46875$.

## I.1.2.2. ПЕРЕВОД ИЗ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ С ОСНОВАНИЕМ m В СИСТЕМУ СЧИСЛЕНИЯ С ОСНОВАНИЕМ n

Программа I.1.2.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | П→х А | 6— | 19 | ←→ | 14 | 38 | — | 11 |
| 01 | 1 | 01 | 20 | П→х 4 | 64 | 39 | F x≠0 | 57 |
| 02 | 0 | 00 | 21 | × | 12 | 40 | 43 | 43 |
| 03 | х→П 3 | 43 | 22 | х→П 2 | 42 | 41 | F L 3 | 5— |
| 04 | ПП | 53 | 23 | 1 | 01 | 42 | 20 | 20 |
| 05 | 12 | 12 | 24 | + | 10 | 43 | ←→ | 14 |
| 06 | П→х 4 | 64 | 25 | х→П 1 | 41 | 44 | В/О | 52 |
| 07 | х→П 3 | 43 | 26 | F . | 25 | | | |
| 08 | П→х В | 6L | 27 | К П→х 1 | Г1 | | Инструкция | |
| 09 | ПП | 53 | 28 | ←→ | 14 | | | |
| 10 | 12 | 12 | 29 | П→х 1 | 61 | | m—в рег. А | |
| 11 | С/П | 50 | 30 | П→х 5 | 65 | | n—в рег. В | |
| 12 | х→П 4 | 44 | 31 | П→х 0 | 60 | | $N_m$ В/О С/П | |
| 13 | F . | 25 | 32 | × | 12 | | | |
| 14 | х→П 0 | 40 | 33 | х→П 5 | 45 | | Регистры | |
| 15 | F . | 25 | 34 | : | 13 | | 0—5 оперативные | |
| 16 | 1 | 01 | 35 | + | 10 | | А m | |
| 17 | х→П 5 | 45 | 36 | П→х 2 | 62 | | В n | |
| 18 | Сх | 0Г | 37 | П→х 1 | 61 | | | |

Программа I.1.2.2/52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | П→х А | 6— | 18 | х→П 2 | 42 | 36 | F L3 | 5— |
| 01 | 1 | 01 | 19 | F . | 25 | 37 | 20 | 20 |
| 02 | 0 | 00 | 20 | П→х 4 | 64 | 38 | ←→ | 14 |
| 03 | х→П 3 | 43 | 21 | × | 12 | 39 | В/О | 52 |
| 04 | ПП | 53 | 22 | В↑ | 0Е | | | |
| 05 | 12 | 12 | 23 | К [x] | 34 | | Инструкция | |
| 06 | П→х 4 | 64 | 24 | П→х 5 | 65 | | | |
| 07 | х→П 3 | 43 | 25 | П→х 2 | 62 | | m—в рег. А | |
| 08 | П→х В | 6L | 26 | × | 12 | | n—в рег. В | |
| 09 | ПП | 53 | 27 | х→П 5 | 45 | | $N_m$ В/О С/П | |
| 10 | 12 | 12 | 28 | : | 13 | | | |
| 11 | С/П | 50 | 29 | П→х Д | 6Г | | Регистры | |
| 12 | х→П 4 | 44 | 30 | + | 10 | | | |
| 13 | Сх | 0Г | 31 | х→П Д | 4Г | | 2—5 оперативные | |
| 14 | х→П Д | 4Г | 32 | ←→ | 14 | | А m | |
| 15 | ВП | 0С | 33 | К {x} | 35 | | В n | |
| 16 | х→П 5 | 45 | 34 | F x≠0 | 57 | | Д $N_n$ | |
| 17 | F . | 25 | 35 | 38 | 38 | | | |

Время вычисления — 0,5 — 2,5 мин.

*Пример.* m = 4, $N_4$ =0,101, n = 8. $N_8$ = 0,21.

### I.1.3. ПЕРЕВОД ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Перевод целой и дробной части исходного числа $N_m$ производится раздельно по методам, приведенным в разделах I.1.1. и I.1.2.

#### I.1.3.1. ПЕРЕВОД ИЗ ДЕСЯТИЧНОЙ И В ДЕСЯТИЧНУЮ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ (m=10 ИЛИ n=10)

Программа I.1.3.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 2 | 42 | 25 | П→x 2 | 62 | 50 | П→x 3 | 63 |
| 01 | 1 | 01 | 26 | П→x 1 | 61 | 51 | F x=0 | 5E |
| 02 | x→П 4 | 44 | 27 | — | 11 | 52 | 32 | 32 |
| 03 | x→П 5 | 45 | 28 | F L0 | 5Г | 53 | ←→ | 14 |
| 04 | + | 10 | 29 | 13 | 13 | 54 | С/П | 50 |
| 05 | x→П 3 | 43 | 30 | ←→ | 14 | 55 | 1 | 01 |
| 06 | 9 | 09 | 31 | П→x 3 | 63 | 56 | + | 10 |
| 07 | x→П 0 | 40 | 32 | П→x B | 6L | 57 | x→П 1 | 41 |
| 08 | К П→x 3 | Г3 | 33 | : | 13 | 58 | F . | 25 |
| 09 | Сх | 0Г | 34 | ПП | 53 | 59 | К П→x 1 | Г1 |
| 10 | П→x 2 | 62 | 35 | 55 | 55 | 60 | F . | 25 |
| 11 | П→x 3 | 63 | 36 | П→x 3 | 63 | 61 | В/О | 52 |
| 12 | — | 11 | 37 | П→x 1 | 61 | | | |
| 13 | П→x B | 6L | 38 | x→П 3 | 43 | | Инструкция | |
| 14 | × | 12 | 39 | П→x B | 6L | | | |
| 15 | x→П 2 | 42 | 40 | × | 12 | | m—в рег. A | |
| 16 | ПП | 53 | 41 | — | 11 | | n—в рег. B | |
| 17 | 55 | 55 | 42 | П→x 5 | 65 | | $N_m$ В/О С/П | |
| 18 | П→x 1 | 61 | 43 | × | 12 | | | |
| 19 | П→x 4 | 64 | 44 | + | 10 | | Регистры | |
| 20 | П→x A | 6— | 45 | П→x 5 | 65 | | | |
| 21 | × | 12 | 46 | П→x A | 6— | | 0—5 оперативные | |
| 22 | x→П 4 | 44 | 47 | × | 12 | | A m | |
| 23 | : | 13 | 48 | x→П 5 | 45 | | B n | |
| 24 | + | 10 | 49 | ←→ | 14 | | | |

Программа I.1.3.1/52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 2 | 42 | 19 | : | 13 | 38 | x→П 1 | 41 |
| 01 | К [x] | 34 | 20 | + | 10 | 39 | ↔ | 14 |
| 02 | x→П 3 | 43 | 21 | F L0 | 5Г | 40 | П→x 3 | 63 |
| 03 | 1 | 01 | 22 | 09 | 09 | 41 | F x=0 | 5E |
| 04 | x→П 4 | 44 | 23 | П→x 3 | 63 | 42 | 24 | 24 |
| 05 | x→П 1 | 41 | 24 | B↑ | 0E | 43 | ↔ | 14 |
| 06 | 9 | 09 | 25 | П→x B | 6L | 44 | С/П | 50 |
| 07 | x→П 0 | 40 | 26 | : | 13 | | | |
| 08 | 0 | 00 | 27 | К [x] | 34 | | Инструкция | |
| 09 | П→x 2 | 62 | 28 | x→П 3 | 43 | | | |
| 10 | К {x} | 35 | 29 | П→x B | 6L | | m—в рег. A | |
| 11 | П→x B | 6L | 30 | × | 12 | | n—в рег. B | |
| 12 | × | 12 | 31 | — | 11 | | $N_m$ В/О С/П | |

*Продолжение*

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 13 | x→П 2 | 42 | 32 | П→x 1 | 61 |
| 14 | К [x] | 34 | 33 | × | 12 |
| 15 | П→x 4 | 64 | 34 | + | 10 |
| 16 | П→x A | 6— | 35 | П→x 1 | 61 |
| 17 | × | 12 | 36 | П→x A | 6— |
| 18 | x→П 4 | 44 | 37 | × | 12 |

Регистры

0—4 оперативные
A m
B n

Время вычисления — 1 — 2 мин.

*Примеры.*

1. Перевод из десятичной системы счисления m = 10, $N_{10}$ = 16,312, n = 5. $N_5$ = 31,124.
2. Перевод в десятичную систему счисления m = 5, $N_5$ = 31,124, n = 10. $N_{10}$ = 16,312.

### I.1.3.2. ПЕРЕВОД ИЗ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ С ОСНОВАНИЕМ m В СИСТЕМУ СЧИСЛЕНИЯ С ОСНОВАНИЕМ n

Программа I.1.3.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | П→x A | 6— | 29 | ↔ | 14 | 58 | × | 12 |
| 01 | 1 | 01 | 30 | B↑ | 0E | 59 | — | 11 |
| 02 | 0 | 00 | 31 | К ПП 8 | —8 | 60 | П→x 5 | 65 |
| 03 | x→П 0 | 40 | 32 | x→П 3 | 43 | 61 | × | 12 |
| 04 | x→П 8 | 48 | 33 | — | 11 | 62 | + | 10 |
| 05 | ПП | 53 | 34 | П→x 7 | 67 | 63 | П→x 5 | 65 |
| 06 | 21 | 21 | 35 | × | 12 | 64 | П→x 6 | 66 |
| 07 | ПП | 53 | 36 | x→П 2 | 42 | 65 | × | 12 |
| 08 | 18 | 18 | 37 | К ПП 8 | —8 | 66 | x→П 5 | 45 |
| 09 | С/П | 50 | 38 | П→x 4 | 64 | 67 | F . | 25 |
| 10 | 1 | 01 | 39 | П→x 6 | 66 | 68 | П→x 1 | 61 |
| 11 | + | 10 | 40 | × | 12 | 69 | F x=0 | 5E |
| 12 | x→П 1 | 41 | 41 | x→П 4 | 44 | 70 | 53 | 53 |
| 13 | К П→x 1 | Г1 | 42 | : | 13 | 71 | F . | 25 |
| 14 | F . | 25 | 43 | + | 10 | 72 | B/O | 52 |
| 15 | F . | 25 | 44 | П→x 2 | 62 | | | |
| 16 | П→x 1 | 61 | 45 | П→x 1 | 61 | | | |
| 17 | B/O | 52 | 46 | — | 11 | | | |
| 18 | П→x 7 | 67 | 47 | F x≠0 | 57 | | | |
| 19 | x→П 0 | 40 | 48 | 51 | 51 | | | |
| 20 | П→x B | 6L | 49 | F L0 | 5Г | | | |
| 21 | x→П 7 | 47 | 50 | 34 | 34 | | | |
| 22 | F . | 25 | 51 | F . | 25 | | | |
| 23 | x→П 6 | 46 | 52 | П→x 3 | 63 | | | |
| 24 | F . | 25 | 53 | B↑ | 0E | | | |
| 25 | 1 | 01 | 54 | П→x 7 | 67 | | | |
| 26 | x→П 4 | 44 | 55 | : | 13 | | | |
| 27 | x→П 5 | 45 | 56 | К ПП 8 | —8 | | | |
| 28 | Cx | 0Г | 57 | П→x 7 | 67 | | | |

Инструкция

m — в рег. A
n — в рег. B
$N_m$ B/O C/П

Регистры

0—8 оперативные
A m
B n

Программа I.1.3.2/52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | П→х A | 6— | 25 | × | 12 | 50 | П→х 5 | 65 |
| 01 | 1 | 01 | 26 | х→П 2 | 42 | 51 | × | 12 |
| 02 | 0 | 00 | 27 | К [x] | 34 | 52 | + | 10 |
| 03 | х→П 0 | 40 | 28 | П→х 4 | 64 | 53 | П→х 5 | 65 |
| 04 | ПП | 53 | 29 | П→х 6 | 66 | 54 | П→х 6 | 66 |
| 05 | 11 | 11 | 30 | × | 12 | 55 | × | 12 |
| 06 | П→х 7 | 67 | 31 | х→П 4 | 44 | 56 | х→П 5 | 45 |
| 07 | х→П 0 | 40 | 32 | : | 13 | 57 | F . | 25 |
| 08 | К ПП 7 | —7 | 33 | + | 10 | 58 | П→х 1 | 61 |
| 09 | С/П | 50 | 34 | П→х 2 | 62 | 59 | F x=0 | 5E |
| 10 | П→х B | 6L | 35 | К {x} | 35 | 60 | 42 | 42 |
| 11 | х→П 7 | 47 | 36 | Fx≠0 | 57 | 61 | F . | 25 |
| 12 | F . | 25 | 37 | 40 | 40 | 62 | В/О | 52 |
| 13 | х→П 6 | 46 | 38 | F L0 | 5Г | | | |
| 14 | F . | 25 | 39 | 24 | 24 | | Инструкция | |
| 15 | 1 | 01 | 40 | F . | 25 | | | |
| 16 | х→П 4 | 44 | 41 | П→х 3 | 63 | | m — в рег. A | |
| 17 | х→П 5 | 45 | 42 | B↑ | 0E | | n — в рег. B | |
| 18 | Сх | 0Г | 43 | П→х 7 | 67 | | $N_m$ В/О С/П | |
| 19 | ↔ | 14 | 44 | : | 13 | | | |
| 20 | B↑ | 0E | 45 | К [x] | 34 | | Регистры | |
| 21 | К [x] | 34 | 46 | х→П 1 | 41 | | | |
| 22 | х→П 3 | 43 | 47 | П→х 7 | 67 | | 0—7 оперативные | |
| 23 | — | 11 | 48 | × | 12 | | A m | |
| 24 | П→х 7 | 67 | 49 | — | 11 | | B n | |

Время вычисления — 1 — 4 мин.
*Пример.* m = 2, $N_2$ = 1101, 11, n = 5. $N_5$ = 23,333333.

## I.2. НЕПРЕРЫВНЫЕ (ЦЕПНЫЕ) ДРОБИ

Действительное положительное число b может быть разложено в цепную дробь

$$b = [a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots}},$$

где $a_i$ (i = 0, 1, 2, ...) — целые положительные числа $a_i > 0$.

### I.2.1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ В ЦЕПНУЮ ДРОБЬ

Для заданного действительного числа b вычисляются элементы цепной дроби $a_0$, $a_1$, $a_2$, ... по формулам:

$$a_0 = \operatorname{int}[b]; \quad a_1 = \operatorname{int}\left[\frac{1}{b - a_0}\right]; \quad a_2 = \operatorname{int}\left[\frac{1}{\frac{1}{b - a_0} - a_1}\right]; \quad \ldots$$

Для вычисления вводится исходное значение b, а затем выполнение каждой команды С/П выводит на индикатор очередное значение $a_1$, в результате получается ряд значений: $a_0$, $a_1$, $a_2$,...

Программа I.2.1/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Инструкция |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P 2 | 21 | 15 | ←→ | 16 | в В/О С/П С/П С/П... |
| 01 | 1 | 14 | 20 | — | 86 | |
| 02 | , | 46 | 21 | ↑ | 06 | Результат |
| 03 | 8 | 84 | 22 | F 2 | 22 | |
| 04 | F 1/x | 45 | 23 | ←→ | 16 | $a_0$, $a_1$, $a_2$, ... |
| 05 | — | 86 | 24 | С/П | 78 | |
| 10 | 1 | 14 | 25 | — | 86 | Регистр |
| 11 | ВП | 66 | 30 | F 1/x | 45 | |
| 12 | 7 | 74 | 31 | БП | 58 | 2 оперативный |
| 13 | ←→ | 16 | 32 | P0 | 01 | |
| 14 | + | 96 | | | | |

Программа I.2.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Инструкция |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 1 | 41 | 06 | П→x 0 | 60 | в В/О С/П С/П С/П... |
| 01 | 1 | 01 | 07 | С/П | 50 | |
| 02 | + | 10 | 08 | — | 11 | Результат |
| 03 | x→П 0 | 40 | 09 | F 1/x | 23 | $a_0$, $a_1$, $a_2$, ... |
| 04 | К П→x 0 | Г0 | 10 | БП | 51 | Регистры |
| 05 | П→x 1 | 61 | 11 | 00 | 00 | 0 $a_1$ |
| | | | | | | 1 оперативный |

Программа I.2.1/52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Инструкция |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | В↑ | 0E | 04 | F 1/x | 23 | в В/О С/П С/П С/П... |
| 01 | К [x] | 34 | 05 | БП | 51 | Результат |
| 02 | С/П | 50 | 06 | 00 | 00 | $a_0$, $a_1$, $a_2$, ... |
| 03 | — | 11 | | | | |

Время вычисления очередного значения $a_1$ — 2—3 с.

*Пример.* b = ln 9. $a_0 = 2$, $a_1 = 5$, $a_2 = 14$, $a_3 = 4$, $a_4 = 1$, ...

### I.2.2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЦЕПНОЙ ДРОБИ В ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЕ ЧИСЛО

Цепная дробь, заданная в виде последовательности значений $a_0$, $a_1$, $a_2$, ..., по программе преобразуется последовательно в действительные числа соответственно $b_0$, $b_1$, $b_2$, ..., ($b_i = [a_0, a_1, ..., a_i]$; $\lim\limits_{i\to\infty} b_i = b$).

Для вычисления $b_i$ представляем в виде $b_i = c_i/d_i$, где $c_i$ и $d_i$ определяются из рекуррентных соотношений [11]:

$$c_i = c_{i-1}\, a_i + c_{i-2} \quad \text{при } c_0 = 1,\ c_1 = a_0;$$

$$d_i = d_{i-1}\, a_i + d_{i-2} \quad \text{при } d_0 = 0,\ d_1 = 1.$$

После ввода каждого последующего значения $a_i$ и выполнения команды С/П на индикаторе высвечивается очередное значение $b_i = [a_0, a_1, \ldots, a_i]$.

Программа I.2.2/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | Р 4 | 41 | 23 | × | 26 | 50 | ↑ | 06 |
| 01 | 0 | 04 | 24 | ↑ | 06 | 51 | F 4 | 42 |
| 02 | Р 2 | 21 | 25 | Р /—/ | 53 | 52 | ←→ | 16 |
| 03 | Р $e^x$ | 33 | 30 | + | 96 | 53 | БП | 58 |
| 04 | Р 5 | 51 | 31 | Р 4 | 41 | 54 | ↑ | 06 |
| 05 | Р 3 | 31 | 32 | F 2 | 22 | | | |
| 10 | : | 36 | 33 | Р , | 43 | | Инструкция | |
| 11 | С/П | 78 | 34 | F 3 | 32 | | | |
| 12 | Р 6 | 61 | 35 | Р 2 | 21 | | В/О $a_0$ С/П $a_1$ С/П $a_2$ С/П... | |
| 13 | F 5 | 52 | 40 | ↑ | 06 | | Результат | |
| 14 | Р , | 43 | 41 | F 6 | 62 | | $в_0, в_1, в_2, \ldots$ | |
| 15 | F 4 | 42 | 42 | × | 26 | | Регистры | |
| 20 | Р 5 | 51 | 43 | ↑ | 06 | | 2—5 оперативные | |
| 21 | ↑ | 06 | 44 | Р /—/ | 53 | | 6 $a_i$ | |
| 22 | F 6 | 62 | 45 | + | 96 | | | |

Программа I.2.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 2 | 42 | 12 | x→П 3 | 43 |
| 01 | 0 | 00 | 13 | × | 12 |
| 02 | x→П 0 | 40 | 14 | + | 10 |
| 03 | ВП | 0С | 15 | x→П 2 | 42 |
| 04 | x→П 3 | 43 | 16 | П→x 0 | 60 |
| 05 | x→П 1 | 41 | 17 | П→x 1 | 61 |
| 06 | : | 13 | 18 | x→П 0 | 40 |
| 07 | С/П | 50 | 19 | П→x 4 | 64 |
| 08 | x→П 4 | 44 | 20 | × | 12 |
| 09 | П→x 3 | 63 | 21 | + | 10 |
| 10 | ←→ | 14 | 22 | БП | 51 |
| 11 | П→x 2 | 62 | 23 | 05 | 05 |

Инструкция

В/О $a_0$ С/П $a_1$ С/П $a_2$ С/П...

Результат

$в_0, в_1, в_2, \ldots$

Регистры

0—3 оперативные

4 $a_i$

Время вычисления после ввода одного значения $a_i$ — 5 с.

*Пример.* $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$. $в_0 = 0$, $в_1 = 1$, $в_2 = 0{,}6667$, $в_3 = 0{,}7$.

## I.3. ДЕЛЕНИЕ ЧИСЕЛ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТОЧНОСТЬЮ

Производится деление «углом» действительных положительных чисел a/в.

### I.3.1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТА В ВИДЕ ЧИСЛА С ПЛАВАЮЩЕЙ ЗАПЯТОЙ

Вначале определяется целая десятичная степень частного M, а затем последовательно при выполнении команд С/П С/П С/П ... вычисляются и выводятся на индикатор десятичные цифры $c_i$ (i = 1, 2, 3,...) дробной части. В результате получаем десятичное число с требуемым количеством десятичных цифр.

Программа I.3.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 1 | 41 | 21 | 43 | 43 | 42 | 25 | 25 |
| 01 | Cx | 0Г | 22 | П→x 4 | 64 | 43 | П→x 4 | 64 |
| 02 | x→П 4 | 44 | 23 | С/П | 50 | 44 | 1 | 01 |
| 03 | ←→ | 14 | 24 | П→x 3 | 63 | 45 | — | 11 |
| 04 | x→П 3 | 43 | 25 | 1 | 01 | 46 | x→П 4 | 44 |
| 05 | П→x 1 | 61 | 26 | 0 | 00 | 47 | П→x 3 | 63 |
| 06 | : | 13 | 27 | × | 12 | 48 | 1 | 01 |
| 07 | F lg | 17 | 28 | x→П 3 | 43 | 49 | БП | 51 |
| 08 | F x⩾0 | 59 | 29 | П→x 1 | 61 | 50 | 14 | 14 |
| 09 | 18 | 18 | 30 | : | 13 | | | |
| 10 | К П→x 4 | Г4 | 31 | 1 | 01 | Инструкция | | |
| 11 | П→x 3 | 63 | 32 | + | 10 | | | |
| 12 | 1 | 01 | 33 | x→П 2 | 42 | В/О а В↑ в С/П С/П | | |
| 13 | /—/ | 0L | 34 | К П→x 2 | Г2 | С/П... | | |
| 14 | F 10 | 15 | 35 | П→x 3 | 63 | Результат | | |
| 15 | × | 12 | 36 | П→x 2 | 62 | | | |
| 16 | БП | 51 | 37 | С/П | 50 | M, $c_1$, $c_2$, ... | | |
| 17 | 04 | 04 | 38 | П→x 1 | 61 | | | |
| 18 | 1 | 01 | 39 | × | 12 | Регистры | | |
| 19 | + | 10 | 40 | — | 11 | 1 в | | |
| 20 | F x⩾0 | 59 | 41 | БП | 51 | 2—4 оперативные | | |

Программа I.3.1/52 может быть сокращена на 5 команд при замене команды с адресом 21 на команду 38 и команд с адресами 28—36 на четыре команды В↑ П → x 1 : К [x].

Время вычисления M — 15 с, время вычисления каждого $c_1$ — — 5 с.

*Пример.* Разделить 100 на 2,3 с 10 значащими цифрами (a = 100, b = 2,3).

Решение. M = 2, $c_1 = 4$, $c_2 = 3$, $c_3 = 4$, $c_4 = 7$, $c_5 = 8$, $c_6 = 2$, $c_7 = 6$, $c_8 = 0$, $c_9 = 8$, $c_{10} = 6$, ...

Результат: $100/2{,}3 = 10^2 \cdot 0{,}4347826086$ ...

### I.3.2. ЕСТЕСТВЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТА

Вначале определяется и выводится на индикатор целая часть частного $c_0$, а затем последовательно при выполнении команд С/П С/П С/П... выводятся десятичные знаки частного $c_i$ (i = 1, 2, ...).

Программа I.3.2/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P 2 | 21 | 21 | ↑ | 06 |
| 01 | ←→ | 16 | 22 | F 2 | 22 |
| 02 | 1 | 14 | 23 | — | 86 |
| 03 | /—/ | 56 | 24 | /—/ | 56 |
| 04 | P 3 | 31 | 25 | P x⩾0 | 49 |
| 05 | × | 26 | 30 | P 1 | 11 |
| 10 | /—/ | 56 | 31 | F 3 | 32 |
| 11 | P , | 43 | 32 | С/П | 78 |
| 12 | F 3 | 32 | 33 | ←→ | 16 |
| 13 | 1 | 14 | 34 | ВП | 66 |
| 14 | + | 96 | 35 | 1 | 14 |
| 15 | P 3 | 31 | 40 | БП | 58 |
| 20 | P /—/ | 53 | 41 | P↑ | 03 |

Инструкция
В/О а↑в С/П С/П С/П...
Результат
$c_0$, $c_1$, $c_2$, ...
Регистры
2 в
3 $c_i$

Время вычисления каждого значения $c_i$ (i = 0,1, 2, ...) — $T = 2(c_i + 1)$ с.

Программа I.3.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 1 | 41 | 13 | + | 10 |
| 01 | ←→ | 14 | 14 | F x⩾0 | 59 |
| 02 | 1 | 01 | 15 | 06 | 06 |
| 03 | /—/ | 0L | 16 | П→x 2 | 62 |
| 04 | x→П 2 | 42 | 17 | С/П | 50 |
| 05 | × | 12 | 18 | × | 12 |
| 06 | П→x 2 | 62 | 19 | ←→ | 14 |
| 07 | 1 | 01 | 20 | /—/ | 0L |
| 08 | + | 10 | 21 | 1 | 01 |
| 09 | x→П 2 | 42 | 22 | 0 | 00 |
| 10 | ←→ | 14 | 23 | × | 12 |
| 11 | В↑ | 0E | 24 | БП | 51 |
| 12 | П→x 1 | 61 | 25 | 02 | 02 |

Инструкция
В/О а В↑ в С/П С/П С/П ...
Результат
$c_0$, $c_1$, $c_2$, ...
Регистры
1 в
2 оперативный

Время вычисления каждого значения $c_i$ (i = 0, 1, 2, ...) — $T = 3.(c_i + 2)$ с.

*Пример*. Разделить 100 на 2,3 с 10 значащими цифрами ($a = 100$, $b = 2, 3$).

Решение. $c_0 = 43$, $c_1 = 4$, $c_2 = 7$, $c_3 = 8$, $c_4 = 2$, $c_5 = 6$, $c_6 = 0$, $c_7 = 8$, $c_8 = 6$, ...

Результат: 100/2,3 = 43,47826086 ...

## I.4. РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

### I.4.1. РЕШЕНИЕ КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

Корни квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

вычисляются по формулам [12]:

а) если $D \geqslant 0$, т. е. корни уравнения действительные, то

$$x_1 = u + \text{sign}(u)\cdot\sqrt{D},\quad x_2 = \frac{c}{ax_1};$$

б) если $D < 0$, т. е. корни уравнения комплексно-сопряженные, то

$$x_1 = u + iv,\quad x_2 = u - iv,$$

где

$$u = -\frac{b}{2a},\quad D = u^2 - \frac{c}{a},\quad v = \sqrt{-D}.$$

Выбранный алгоритм при $D \geqslant 0$ позволяет уменьшить ошибки вычисления, если значения в/2а и $\sqrt{D}$ близки по абсолютной величине.

Программа построена так, что при $D < 0$ счет останавливается и на индикатор выводится сигнал ошибки (080000000 000 — для Б3-21 или ЕГГОГ — для МК-54 и МК-52). На самом деле ошибки нет — просто получен сигнал о том, что корни уравнения — комплексно-сопряженные. После нового нажатия клавиши С/П счет продолжается, а результатом является действительная и мнимая часть корней.

Программа I.4.1/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | /—/ | 56 | 23 | + | 96 | 50 | : | 36 |
| 01 | F 1/x | 45 | 24 | F √ | 65 | 51 | F 1/x | 45 |
| 02 | P 2 | 21 | 25 | P НОП | 39 | 52 | ←→ | 16 |
| 03 | 2 | 24 | 30 | P x⩾0 | 49 | 53 | С/П | 78 |
| 04 | : | 36 | 31 | F /—/ | 55 | 54 | /—/ | 56 |
| 05 | С/П | 78 | 32 | ↑ | 06 | 55 | F √ | 65 |
| 10 | × | 26 | 33 | F 3 | 32 | 60 | ↑ | 06 |
| 11 | P 3 | 31 | 34 | P x<0 | 69 | 61 | F 3 | 32 |
| 12 | F x² | 55 | 35 | P , | 43 | 62 | С/П | 78 |
| 13 | P , | 43 | 40 | ←→ | 16 | | | |
| 14 | F 2 | 22 | 41 | /—/ | 56 | | Регистры | |
| 15 | С/П | 78 | 42 | + | 96 | | | |
| 20 | × | 26 | 43 | ↑ | 06 | | 2 —1/a | |
| 21 | ↑ | 06 | 44 | P , | 43 | | 3 —в/2а | |
| 22 | P /—/ | 53 | 45 | /—/ | 56 | | | |

Программа I.4.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 2 | 42 | 12 | — | 11 | 24 | + | 10 |
| 01 | С/П | 50 | 13 | F Bx | 0 | 25 | : | 13 |
| 02 | /—/ | 0L | 14 | ←→ | 14 | 26 | F Bx | 0 |
| 03 | ←→ | 14 | 15 | F $\sqrt{}^{-}$ | 21 | 27 | С/П | 50 |
| 04 | : | 13 | 16 | К НОП | 54 | 28 | /—/ | 0L |
| 05 | 2 | 02 | 17 | F x⩾0 | 59 | 29 | F $\sqrt{}^{-}$ | 21 |
| 06 | : | 13 | 18 | 28 | 28 | 30 | П→x 3 | 63 |
| 07 | x→П 3 | 43 | 19 | П→x3 | 63 | 31 | С/П | 50 |
| 08 | F $x^2$ | 22 | 20 | F x < 0 | 5C | | | |
| 09 | С/П | 50 | 21 | 24 | 24 | | Регистры | |
| 10 | П→x 2 | 62 | 22 | ←→ | 14 | | 2 a | |
| 11 | : | 13 | 23 | /—/ | 0L | | .3 — в/2a | |

Для обеих программ используется единая инструкция.

Инструкция I.4.1/21,54,52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Занести величины | | | |
| а, в и с | a | В/О С/П | |
| | b | С/П | |
| | c | | |
| 2. Вычислить корни: | | С/П | |
| а) если D⩾0 | | | $x_1$—в рег. X<br>$x_2$—в рег. Y |
| б) если D<0 | | | 080000000 000—для I.4.1/21<br>ЕГГОГ—для I.4.1/54,52 |
| | | С/П | u—в рег. X, 3<br>v—в рег. Y |

Время вычисления — 7 — 10 с.

*Примеры.*

1. $x^2 + x - 2 = 0$. $x_1 = -2$; $x_2 = 1$.
2. $x^2 + 2x + 2 = 0$. $x_1 = -1 + i1$; $x_2 = -1 - i \cdot 1$.

### I.4.2. РЕШЕНИЕ КУБИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Кубическое уравнение в канонической форме

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

делим на a и вводим новую переменную $y = x + b/3a$, в результате получаем кубическое уравнение относительно новой переменной y:

$$y^3 + 3py + 2q = 0,$$

где $$q = \frac{b^3}{27a^3} - \frac{bc}{6a^2} + \frac{d}{2a}, \quad p = \frac{3ac - b^2}{3a^2}.$$

Решение такого уравнения $y_{1,2,3}$ запишем в виде таблицы [13]

| $p < 0$ | | $p > 0$ |
|---|---|---|
| $q^2+p^3 \leqslant 0$ | $q^2+p^3 > 0$ | |
| $\cos\varphi = q/r^3$ | $\operatorname{ch}\varphi = q/r^3$ | $\operatorname{sh}\varphi = q/r^3$ |
| $y_1 = -2r\cos\varphi/3$ | $y_1 = -2r\operatorname{ch}\varphi/3$ | $y_1 = -2r\operatorname{sh}\varphi/3$ |
| $y_2 = 2r\cos\left(\frac{\pi-\varphi}{3}\right)$ | $y_2 = r\operatorname{ch}\varphi/3 + i\sqrt{3}\, r\operatorname{sh}\varphi/3$ | $y_2 = r\operatorname{sh}\varphi/3 + i\sqrt{3}\, r\operatorname{ch}\varphi/3$ |
| $y_3 = 2r\cos\left(\frac{\pi+\varphi}{3}\right)$ | $y_3 = r\operatorname{ch}\varphi/3 - i\sqrt{3}\, r\operatorname{sh}\varphi/3$ | $y_3 = r\operatorname{sh}\varphi/3 - i\sqrt{3}\, r\operatorname{ch}\varphi/3$ |

где

$$r = \operatorname{sign}(q)\cdot\sqrt{|p|}.$$

В случае, если корни $y_{2,3}$ комплексные, обозначим $y_{2,3} = u \pm iv$.

Программа I.4.2/54, 52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 1 | 41 | 35 | : | 13 | 70 | : | 13 |
| 01 | ←→ | 14 | 36 | x→П1 | 41 | 71 | F $e^x$ | 16 |
| 02 | x→П 0 | 40 | 37 | F cos | 1Г | 72 | x→П 1 | 41 |
| 03 | F $x^2$ | 22 | 38 | /—/ | 0L | 73 | : | 13 |
| 04 | F $\sqrt{}$ | 21 | 39 | П→x 2 | 62 | 74 | П→x 1 | 61 |
| 05 | П→x 1 | 61 | 40 | 2 | 02 | 75 | — | 11 |
| 06 | П→x 1 | 61 | 41 | × | 12 | 76 | x→П 0 | 40 |
| 07 | × | 12 | 42 | × | 12 | 77 | 2 | 02 |
| 08 | : | 13 | 43 | С/П | 50 | 78 | : | 13 |
| 09 | F $\sqrt{}$ | 21 | 44 | F Bx | 0 | 79 | П→x 1 | 61 |
| 10 | × | 12 | 45 | П→x 1 | 61 | 80 | + | 10 |
| 11 | x→П 2 | 42 | 46 | F π | 20 | 81 | П→x 2 | 62 |
| 12 | B↑ | 0E | 47 | 3 | 03 | 82 | × | 12 |
| 13 | F $x^2$ | 22 | 48 | : | 13 | 83 | 3 | 03 |
| 14 | × | 12 | 49 | x→П 0 | 40 | 84 | F $\sqrt{}$ | 21 |
| 15 | : | 13 | 50 | — | 11 | 85 | × | 12 |
| 16 | 1 | 01 | 51 | F cos | 1Г | 86 | П→x 0 | 60 |
| 17 | П→x 0 | 60 | 52 | × | 12 | 87 | П→x 2 | 62 |
| 18 | F x<0 | 5C | 53 | П→x 1 | 61 | 88 | × | 12 |
| 19 | 59 | 59 | 54 | П→x 0 | 60 | 89 | С/П | 50 |
| 20 | ←→ | 14 | 55 | + | 10 | 90 | 0 | 00 |
| 21 | /—/ | 0L | 56 | F cos | 1Г | 91 | F 1/x | 23 |
| 22 | ←→ | 14 | 57 | БП | 51 | 92 | К НОП | 54 |
| 23 | B↑ | 0E | 58 | 39 | 39 | 93 | F . | 25 |
| 24 | F $x^2$ | 22 | 59 | F . | 25 | 94 | 2 | 02 |
| 25 | × | 12 | 60 | x→П 1 | 41 | 95 | : | 13 |
| 26 | П→x 1 | 61 | 61 | ←→ | 14 | 96 | /—/ | 0L |
| 27 | F $x^2$ | 22 | 62 | B↑ | 0E | 97 | С/П | 50 |

*Продолжение*

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 28 | + | 10 | 63 | F $x^2$ | 22 |
| 29 | F x<0 | 5C | 64 | П→x 1 | 61 |
| 30 | 59 | 59 | 65 | + | 10 |
| 31 | F . | 25 | 66 | F $\sqrt{}$ | 21 |
| 32 | ←→ | 14 | 67 | + | 10 |
| 33 | F $\cos^{-1}$ | 1— | 68 | F ln | 18 |
| 34 | 3 | 03 | 69 | 3 | 03 |

Регистры 0; 1 оперативные 2 г

Инструкция I.4.2/54,52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Переключатель Р/Г поставить в положение Р | | | |
| 2. Ввести значения p и q | p<br>q | В↑ | p<br>q |
| 3. Вычислить действительный корень | | В/О С/П | $y_1$ |
| 4. Вычислить остальные корни: | | С/П | |
| а) если корни действительные | | | $y_2$—в рег. X<br>$y_3$—в рег. Y |
| б) если корни мнимые | | ЕГГОГ<br>С/П | u—в рег. X<br>v—в рег. Y |

Время вычисления — 30 с.

*Примеры.*

1. $y^3 - 9y + 8 = 0$ (p = — 3, q = 4).
   Ответ: $y_1 = -3{,}3723$, $y_2 = 1$, $y_3 = 2{,}3723$.
2. $y^3 - 6y - 40 = 0$ (p = — 2, q = —20).
   Ответ: $y_1 = 4$, $y_{2,3} = -2 \pm i \cdot 2{,}4495$.
3. $y^3 + 12y - 32 = 0$ (p = 4, q = — 16).
   Ответ: $y_1 = 2$, $y_{2,3} = -1 \pm i \cdot 3{,}873$.

### I.4.3. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = p_1, \\ a_2 x + b_2 y = p_2. \end{cases}$$

Значение a, в, p вводятся в регистры памяти 1—6 согласно следующей таблице:

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & p_1 \\ a_2 & b_2 & p_2 \end{matrix} \right\| \Rightarrow \left\| \begin{matrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} \right\|.$$

В Б3-21 регистр памяти 1 совпадает с регистром Y, поэтому при расчете по программе I.4.3/21 значение $a_2$ в Р1 вводится последним после ввода остальных коэффициентов a, в, p.

Программа I.4.3/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P 7 | 71 | 32 | ПП | 68 |
| 01 | F 5 | 52 | 33 | F 4 | 42 |
| 02 | × | 26 | 34 | ↑ | 06 |
| 03 | P , | 43 | 35 | P /—/ | 53 |
| 04 | F 4 | 42 | 40 | С/П | 78 |
| 05 | ↑ | 06 | 41 | ↑ | 06 |
| 10 | F 2 | 22 | 42 | F 6 | 62 |
| 11 | × | 26 | 43 | × | 26 |
| 12 | ↑ | 06 | 44 | P , | 43 |
| 13 | P /—/ | 53 | 45 | F 5 | 52 |
| 14 | — | 86 | 50 | ↑ | 06 |
| 15 | P 8 | 81 | 51 | F 3 | 32 |
| 20 | F 2 | 22 | 52 | × | 26 |
| 21 | ПП | 68 | 53 | ↑ | 06 |
| 22 | F 4 | 42 | 54 | P /—/ | 53 |
| 23 | /—/ | 56 | 55 | — | 86 |
| 24 | P , | 43 | 60 | ↑ | 06 |
| 25 | F 4 | 42 | 61 | F 8 | 82 |
| 30 | P 5 | 51 | 62 | : | 36 |
| 31 | F 7 | 72 | 63 | В/О | 48 |

Инструкция

$p_1$—в Р6, $в_1$—в Р5,
$a_1$—в. Р4, $p_2$—в Р3,
$в_2$—в Р2, $a_2$—в Р1
В/О С/П

Результат

x—в рег. X
y—в рег. Y

Регистры

| | |
|---|---|
| 2 | $в_2$ |
| 3 | $p_2$ |
| 4 | $a_1$ |
| 5 | оперативный |
| 6 | $p_1$ |
| 7 | $a_2$ |
| 8 | $a_1$ $в_2$—$a_2$ $в_1$ |

Программа I.4.3/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | П→x 6 | 66 | 15 | В↑ | 0E |
| 01 | П→x 1 | 61 | 16 | П→x 6 | 66 |
| 02 | × | 12 | 17 | ←→ | 14 |
| 03 | П→x 3 | 63 | 18 | П→x 5 | 65 |
| 04 | П→x 4 | 64 | 19 | × | 12 |
| 05 | × | 12 | 20 | — | 11 |
| 06 | — | 11 | 21 | П→x 4 | 64 |
| 07 | П→x 5 | 65 | 22 | : | 13 |
| 08 | П→x 1 | 61 | 23 | С/П | 50 |
| 09 | × | 12 | | | |
| 10 | П→x 4 | 64 | | | |
| 11 | П→x 2 | 62 | | | |
| 12 | × | 12 | | | |
| 13 | — | 11 | | | |
| 14 | : | 13 | | | |

Инструкция

$a_1$ x→П 4, $в_1$ x→П 5
$p_1$ x→П 6, $a_2$ x→П 1
$в_2$ x→П 2, $p_3$ x→П 3
В/О С/П

Результат

x—в рег. X
y—в рег. Y

Регистры

| | |
|---|---|
| 1 | $a_2$ |
| 2 | $в_2$ |
| 3 | $p_2$ |
| 4 | $a_1$ |
| 5 | $в_1$ |
| 6 | $p_1$ |

Время вычисления — 8 с.

*Пример* $\begin{cases} 3x + 5y = -9, \\ 2x - y = 7. \end{cases}$

Ответ: $x = 2$, $y = -3$.

### I.4.4. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ТРЕХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = p_1, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = p_2, \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = p_3, \end{cases} \text{ при } a_1 \neq 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Значения a, в, c, p вводятся по столбцам.

Программа I.4.4/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П Д | 4Г | 27 | П→x 9 | 69 | 54 | П→x C | 6C |
| 01 | F . | 25 | 28 | × | 12 | 55 | × | 12 |
| 02 | x→П C | 4C | 29 | П→x 3 | 63 | 56 | + | 10 |
| 03 | ←→ | 14 | 30 | П→x 8 | 68 | 57 | — | 11 |
| 04 | x→П B | 4L | 31 | × | 12 | 58 | x→П A | 4— |
| 05 | 1 | 01 | 32 | — | 11 | 59 | С/П | 50 |
| 06 | 1 | 01 | 33 | П→x 5 | 65 | | | |
| 07 | x→П 1 | 41 | 34 | П→x 9 | 69 | | Инструкция | |
| 08 | 3 | 03 | 35 | × | 12 | | В/О | |
| 09 | x→П 0 | 40 | 36 | П→x 6 | 66 | | $a_1$ В↑ $a_2$ В↑ $a_3$ С/П | |
| 10 | С/П | 50 | 37 | П→x 8 | 68 | | $в_1$ В↑ $в_2$ В↑ $в_3$ С/П | |
| 11 | П→x Д | 6Г | 38 | × | 12 | | $c_1$ В↑ $c_2$ В↑ $c_3$ С/П | |
| 12 | : | 13 | 39 | — | 11 | | $p_1$ В↑ $p_2$ В↑ $p_3$ С/П | |
| 13 | К x→П 1 | L1 | 40 | : | 13 | | | |
| 14 | x→П 2 | 42 | 41 | x→П C | 4C | | Результат | |
| 15 | П→x C | 6C | 42 | П→x 4 | 64 | | | |
| 16 | × | 12 | 43 | П→x 2 | 62 | | x—в рег. X , A | |
| 17 | — | 11 | 44 | П→x 5 | 65 | | y—в рег. B | |
| 18 | К x→П 1 | L1 | 45 | П→x C | 6C | | z—в рег. C | |
| 19 | F . | 25 | 46 | × | 12 | | | |
| 20 | П→x 2 | 62 | 47 | — | 11 | | Регистры | |
| 21 | П→x B | 6L | 48 | П→x 8 | 68 | | | |
| 22 | × | 12 | 49 | : | 13 | | 0—9; Д оперативные | |
| 23 | — | 11 | 50 | x→П B | 4L | | A x | |
| 24 | К x→П 1 | L1 | 51 | П→x A | 6— | | B y | |
| 25 | F L0 | 5Г | 52 | × | 12 | | C z | |
| 26 | 10 | 10 | 53 | П→x 7 | 67 | | | |

Время вычисления после ввода последнего столбца — 15 с.

*Пример.*
$$\begin{cases} 2x - 5y - 4z = -28, \\ -x + 2y + 3z = 17, \\ 3x - 2y + 3z = 5. \end{cases}$$

Ответ: $x = -1$, $y = 2$, $z = 4$.

### I.4.5. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЧЕТЫРЕХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

$$\begin{cases} a_{11} x + a_{12} y + a_{13} z + a_{14} t = b_1, \\ a_{21} x + a_{22} y + a_{23} z + a_{24} t = b_2, \\ a_{31} x + a_{32} y + a_{33} z + a_{34} t = b_3, \\ a_{41} x + a_{42} y + a_{43} z + a_{44} t = b_4. \end{cases}$$

Решение производится методом приведения матрицы коэффициентов $||a_{ij}||$ к диагональному виду. На все главные миноры матрицы $||a_{ij}||$, содержащие $a_{11}$, накладываются ограничения:

$$a_{11} \neq 0; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Элементы системы уравнений $a_{ij}$, $в_i$ вводятся построчно.

Программа I.4.5/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 3 | 43 | 37 | x→П 8 | 48 | 74 | x→П 1 | 41 |
| 01 | 4 | 04 | 38 | ПП | 53 | 75 | ПП | 53 |
| 02 | x→П 0 | 40 | 39 | 63 | 63 | 76 | 77 | 77 |
| 03 | x→П 4 | 44 | 40 | ←→ | 14 | 77 | С/П | 50 |
| 04 | С/П | 50 | 41 | : | 13 | 78 | П→x 1 | 61 |
| 05 | П→x 3 | 63 | 42 | x→П 3 | 43 | 79 | ПП | 53 |
| 06 | : | 13 | 43 | 7 | 07 | 80 | 86 | 86 |
| 07 | К x→П 4 | L4 | 44 | x→П 4 | 44 | 81 | П→x 2 | 62 |
| 08 | x→П Д | 4Г | 45 | П→x Д | 6Г | 82 | К П→x 4 | Г4 |
| 09 | П→x 9 | 69 | 46 | П→x В | 6L | 83 | × | 12 |
| 10 | x→П А | 4— | 47 | ПП | 53 | 84 | — | 11 |
| 11 | Сx | 0Г | 48 | 85 | 85 | 85 | П→x 3 | 63 |
| 12 | К x→П 4 | L4 | 49 | x→П Д | 4Г | 86 | К П→x 4 | Г4 |
| 13 | F L0 | 5Г | 50 | П→x 7 | 67 | 87 | × | 12 |
| 14 | 04 | 04 | 51 | × | 12 | 88 | — | 11 |
| 15 | x→П 9 | 49 | 52 | — | 11 | 89 | В/О | 52 |
| 16 | ПП | 53 | 53 | П→x С | 6С | | | |
| 17 | 62 | 62 | 54 | П→x Д | 6Г | | Инструкция | |
| 18 | П→x 2 | 62 | 55 | П→x 6 | 66 | | | |
| 19 | : | 13 | 56 | ПП | 53 | | В/О $a_{11}$ С/П $a_{12}$ С/П... | |
| 20 | x→П С | 4С | 57 | 83 | 83 | | ... $в_1$ С/П | |
| 21 | ←→ | 14 | 58 | x→П С | 4С | | . . . . . | |
| 22 | П→x 2 | 62 | 59 | П→x 5 | 65 | | $a_{41}$ С/П $a_{42}$ С/П... | |
| 23 | : | 13 | 60 | ПП | 53 | | ...$в_4$ С/П | |
| 24 | x→П 9 | 49 | 61 | 83 | 83 | | Результат | |
| 25 | П→x 1 | 61 | 62 | x→П В | 4L | | x—в рег. X, В | |
| 26 | П→x 2 | 62 | 63 | С/П | 50 | | y—в рег. С | |
| 27 | : | 13 | 64 | x→П 3 | 43 | | z—в рег. Д | |
| 28 | x→П 6 | 46 | 65 | 4 | 04 | | t—в рег. 3 | |
| 29 | ПП | 53 | 66 | x→П 4 | 44 | | | |
| 30 | 63 | 63 | 67 | С/П | 50 | | Регистры | |
| 31 | П→x 1 | 61 | 68 | ПП | 53 | | 0—2; 4—9; А оперативные | |
| 32 | : | 13 | 69 | 85 | 85 | | 3 t | |
| 33 | x→П В | 4L | 70 | x→П 2 | 42 | | В x | |
| 34 | ←→ | 14 | 71 | С/П | 50 | | С y | |
| 35 | П→x 1 | 61 | 72 | ПП | 53 | | Д z | |
| 36 | : | 13 | 73 | 81 | 81 | | | |

Полное время вычисления — 2 мин.

*Пример.*
$$\begin{cases} x+2y+3z+t=2, \\ 2x-3y+z-t=15, \\ 3x+y-2z+2t=-13, \\ 4x-5y+2z-3t=32. \end{cases}$$

Ответ: $x = 1$, $y = -2$, $z = 3$, $t = -4$.

### I.4.6. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ f(x)=0

Подпрограмма вычисления значений функции f (x) размещается в памяти машины сразу за основной программой и заканчивается командой возврата В/О. Аргумент x для вычисления f (x) помещается в регистр X. После вычисления подпрограммы значение f (x) также помещается в регистр X.

#### I.4.6.1. МЕТОД ДИХОТОМИИ

Корень уравнения f $(x) = 0$ ищется на интервале неопределенности $a \leqslant x \leqslant в$ в предположении, что на этом интервале находится только один корень, откуда f (a)·f (b) $< 0$. За каждый шаг итерации интервал неопределенности уменьшается вдвое [15], таким образом за n шагов итерации интервал неопределенности становится равным $(в - a)\cdot 2^{-n}$.

Программа I.4.6.1/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P 5 | 51 | 23 | ПП | 68 | 50 | P /—/ | 53 |
| 01 | ←→ | 16 | 24 | F 6 | 62 | 51 | 1 | 14 |
| 02 | P 4 | 41 | 25 | ↑ | 06 | 52 | — | 86 |
| 03 | ПП | 68 | 30 | F 3 | 32 | 53 | P x=0 | 59 |
| 04 | F 6 | 62 | 31 | × | 26 | 54 | F 1 | 12 |
| 05 | P 3 | 31 | 32 | P x<0 | 69 | 55 | F 2 | 22 |
| 10 | С/П | 78 | 33 | P , | 43 | 60 | С/П | 78 |
| 11 | P , | 43 | 34 | F 2 | 22 | | | |
| 12 | F 4 | 42 | 35 | P 5 | 51 | | Регистры | |
| 13 | ↑ | 06 | 40 | БП | 58 | | | |
| 14 | F 5 | 52 | 41 | P 5 | 51 | 2 | $x_0$ | |
| 15 | + | 96 | 42 | ←→ | 16 | 3 | $f(x_0)$ | |
| 20 | 2 | 24 | 43 | P 3 | 31 | 4; 5 | оперативные | |
| 21 | : | 36 | 44 | F 2 | 22 | | | |
| 22 | P 2 | 21 | 45 | P 4 | 41 | | | |

Программа I.4.6.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П B | 4L | 13 | x→П 2 | 42 | 26 | x→П 3 | 43 |
| 01 | ←→ | 14 | 14 | ПП | 53 | 27 | П→x 2 | 62 |
| 02 | x→П A | 4— | 15 | 33 | 33 | 28 | x→П A | 4— |
| 03 | ПП | 53 | 16 | П→x 3 | 63 | 29 | F L0 | 5Г |
| 04 | 33 | 33 | 17 | ←→ | 14 | 30 | 08 | 08 |
| 05 | x→П 3 | 43 | 18 | × | 12 | 31 | П→x 2 | 62 |
| 06 | С/П | 50 | 19 | F x<0 | 5C | 32 | С/П | 50 |
| 07 | x→П 0 | 40 | 20 | 25 | 25 | | | |
| 08 | П→x A | 6— | 21 | П→x 2 | 62 | | Регистры | |
| 09 | П→x B | 6L | 22 | x→П B | 4L | | | |
| 10 | + | 10 | 23 | БП | 51 | 0, A, B оперативные | | |
| 11 | 2 | 02 | 24 | 29 | 29 | 2 | $x_0$ | |
| 12 | : | 13 | 25 | F Bx | 0 | 3 | $f(x_0)$ | |

Инструкция I.4.6.1/21, 54, 52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Ввести программу и подпрограмму вычисления f(x) | | | |
| 2. Занести начальные границы интервала неопределенности | a<br>в | В↑<br>В/О С/П | a<br>f(a) |
| 3. Занести требуемое число итераций n и вычислить корень | n | С/П | $x_0$ — в рег. X, 2<br>$f(x_0)$ — в рег. 3 |

*Пример.*

Найти корень уравнения $f(x) = e^x - \sqrt{x^2+1} - 3 = 0$ на интервале 0—2, выполнив 10 итераций.

Решение. Подпрограмма вычисления значений функции $f(x) = e^x - \sqrt{x^2+1} - 3$ имеет вид:

а) для программы I.4.6.1/21 ↑ P , ↔ F $x^2$ 1 + F $\sqrt{}$ ↑ P /—/ P $e^x$ — 3 + /—/ В/О

б) для программы I.4.6.1/54,52 Fe$^x$F BxFx$^2$1+F $\sqrt{}$ — 3— В/О

Ответ: $x_0 = 1{,}584$; точное значение $x_0 = 1{,}5837$.

Время вычисления по программе I.4.6.1/21 — 1 мин 20 с; по программе I. 4.6.1/54, 52 — 1 мин 45 с.

### I.4.6.2. МЕТОД ХОРД

Для нахождения корня уравнения $f(x) = 0$ используется метод хорд [15]. Подпрограмма вычисления f (x) располагается, начиная с адреса 44, и заканчивается командой В/О. Значение аргумента x для вычисления f (x) располагается в регистре X, туда же помещается вычисленное значение f (x). Корень x лежит на интервале (a, b).

Программа I.4.6.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 0 | 40 | 17 | — | 11 | 34 | П→x 2 | 62 |
| 01 | F. | 25 | 18 | П→x 2 | 62 | 35 | БП | 51 |
| 02 | x→П B | 4L | 19 | П→x 1 | 61 | 36 | 40 | 40 |
| 03 | ←→ | 14 | 20 | — | 11 | 37 | П→x C | 6C |
| 04 | x→П A | 4— | 21 | : | 13 | 38 | x→П B | 4L |
| 05 | ПП | 53 | 22 | x→П C | 4C | 39 | П→x 3 | 63 |
| 06 | 44 | 44 | 23 | ПП | 53 | 40 | F L 0 | 5Г |
| 07 | x→П 1 | 41 | 24 | 44 | 44 | 41 | 11 | 11 |
| 08 | П→xB | 6L | 25 | x→П 3 | 43 | 42 | П→x C | 6C |
| 09 | ПП | 53 | 26 | П→x 1 | 61 | 43 | С/П | 50 |
| 10 | 44 | 44 | 27 | × | 12 | | | |
| 11 | x→П 2 | 42 | 28 | F x⩾0 | 59 | | Регистры | |
| 12 | П→x A | 6— | 29 | 37 | 37 | | | |
| 13 | × | 12 | 30 | П→x 3 | 63 | 1, 2, A, B | оперативные | |
| 14 | П→x B | 6L | 31 | x→П 1 | 41 | 3 | $f(x_0)$ | |
| 15 | П→x 1 | 61 | 32 | П→x C | 6C | C | $(x_0)$ | |
| 16 | × | 12 | 33 | x→П A | 4— | | | |

Инструкция I.4.6.2/54,52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Ввести программу и подпрограмму вычисления функции f(x) | | | |
| 2. Занести два значения аргумента и количество итераций | a<br>в<br>n | В↑<br>В↑ | a<br>в<br>n |
| 3. Вычислить $x_0$ | | В/О С/П | $x_0$— в рег. X,C<br>$f(x_0)$—в рег. Y |

*Пример.* Найти корень уравнения $x^3 + e^x = 0$ при $n = 10$ $a = -2$, $b = 2$.

Решение. Программа вычисления значений функции $f(x) = x^3 + e^x$ имеет вид Fe$^x$ F Bx B↑ Fx$^2$ × + B/O

Ответ: $\tilde{x}_0 = -0{,}77014$; точное значение $x_0 = -0{,}7729$. Время вычисления примера — 2 мин.

### I.4.6.3. МЕТОД ХОРД ПРИ ОДНОМ ФИКСИРОВАННОМ УЗЛЕ

Для нахождения корня уравнения f(x) = 0 используется метод хорд с фиксированным узлом в точке a. Подпрограмма вычисления f (x) располагается непосредственно за основной программой и заканчивается командой В/О. Значение аргумента x для вычисления f (x) располагается в регистре X, туда же помещается вычисленное значение f (x).

Программа I.4.6.3/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P /—/ | 53 | 23 | F 3 | 32 | 50 | P /—/ | 53 |
| 01 | ←→ | 16 | 24 | × | 26 | 51 | 1 | 14 |
| 02 | P 3 | 31 | 25 | P , | 43 | 52 | — | 86 |
| 03 | ПП | 68 | 30 | F 2 | 22 | 53 | P x=0 | 59 |
| 04 | F 6 | 62 | 31 | ←→ | 16 | 54 | F 1 | 12 |
| 05 | P 4 | 41 | 32 | P 2 | 21 | 55 | P , | 43 |
| 10 | С/П | 78 | 33 | F 4 | 42 | 60 | С/П | 78 |
| 11 | P , | 43 | 34 | × | 26 | | | |
| 12 | P 2 | 21 | 35 | ↑ | 06 | | Регистры | |
| 13 | ПП | 68 | 40 | P /—/ | 53 | | | |
| 14 | F 6 | 62 | 41 | — | 86 | | 2 $f(x_0)$ | |
| 15 | ↑ | 06 | 42 | ↑ | 06 | | 3 a | |
| 20 | F 4 | 42 | 43 | P /—/ | 53 | | 4 f(a) | |
| 21 | — | 86 | 44 | : | 36 | | | |
| 22 | P , | 43 | 45 | /—/ | 56 | | | |

Инструкция I.4.6.3/21

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Ввести программу и подпрограмму вычислений функции f(x) | | | |
| 2. Занести начальные значения a и b | a | ↑ | a |
| | в | В/О С/П | f(a) |
| 3. Занести требуемое число итераций n и вычислить $x_0$ | n | С/П | $x_0$—в рег. X<br>$f(x_0)$—в рег. 2 |

Программа I.4.6.3/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 0 | 40 | 11 | В↑ | 0E | 22 | x→П B | 4L |
| 01 | F . | 25 | 12 | П→x A | 6— | 23 | F L 0 | 5Г |
| 02 | x→П B | 4L | 13 | × | 12 | 24 | 09 | 09 |
| 03 | ←→ | 14 | 14 | П→x 1 | 61 | 25 | С/П | 50 |
| 04 | x→П A | 4— | 15 | П→x B | 6L | | | |
| 05 | ПП | 53 | 16 | × | 12 | | Регистры | |
| 06 | 26 | 26 | 17 | — | 11 | 0 | счетчик | |
| 07 | x→П 1 | 41 | 18 | ←→ | 14 | 1 | f(a) | |
| 08 | П→x B | 6L | 19 | П→x 1 | 61 | A | a | |
| 09 | ПП | 53 | 20 | — | 11 | B | $x_0$ | |
| 10 | 26 | 26 | 21 | : | 13 | | | |

Инструкция I.4.6.3./54,52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Ввести программу и подпрограмму вычисления f(x) | | | |
| 2. Занести начальные значения a, b и количество итераций n | a<br>b<br>n | B↑<br>B↑ | . a<br>b<br>n |
| 3. Вычислить $x_0$ и $f(x_0)$ | | В/О С/П | $x_0$—в рег. X,B<br>$f(x_0)$—в рег. Y |
| 4. Для выполнения $n_1$ добавочных итераций | $n_1$ | x→П 0<br>БП 08 С/П | $x_0$—в рег. X,B<br>$f(x_0)$—в рег. Y |

*Пример.* Найти корень уравнения $x^3 + e^x = 0$ при $n = 10$, $a = -2$, $b = 2$.

Решение. Подпрограмма вычисления значений функции $f(x) = x^3 + e^x$ имеет вид:

а) для программы I.4.6.3/21 ↑ $Fx^2 \times \leftrightarrow Pe^x + В/О$

б) для программы I.4.6.3/54,52 $Fe^x$ F Bx B↑ F $x^2$ × + В/О

Ответ: $\tilde{x}_0 = -0{,}7701$; точное значение $x_0 = -0{,}7729$.

Время вычисления примера: для программы I.4.6.3/21 — 1 мин 10 с; для программы I.4.6.3/54,52—1 мин 30 с.

### I.4.6.4. МЕТОД ЗАЙДЕЛЯ

Уравнение $f(x) = 0$ приводится предварительно к виду $x = f_1(x)$.

Для вычисления корня $x_0$ используется итерационная процедура: значение $x_{к+1}$ определяется как $x_{к+1} = f_1(x_к)$ [15].

Программа вычисления очень короткая и не требует установки всего интервала неопределенности, а лишь начального значения x. Этот метод сходится в случае $\left|\frac{df_1(x)}{dx}\right| \leqslant 1$.

Подпрограмма вычисления $f_1(x)$ располагается непосредственно за основной программой и заканчивается командой В/О. Используемое при этом значение аргумента x и вычисленная функция f(x) располагаются в регистре X.

Программа I.4.6.4/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | ←→ | 16 | 11 | P /—/ | 53 | |
| 01 | P /—/ | 53 | 12 | 1 | 14 | |
| 02 | ←→ | 16 | 13 | — | 86 | Регистр |
| 03 | P , | 43 | 14 | P x=0 | 59 | |
| 04 | P 2 | 21 | 15 | 0 | 04 | 2 $x_0$ |
| 05 | ПП | 68 | 20 | P , | 43 | |
| 10 | P × | 23 | 21 | С/П | 78 | |

Программа I.4.6.4/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Регистры |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 3 | 43 | 04 | 08 | 08 | |
| 01 | ←→ | 14 | 05 | F L 3 | 5— | 2 $x_0$ |
| 02 | x→П 2 | 42 | 06 | 02 | 02 | 3 оперативный |
| 03 | ПП | 53 | 07 | С/П | 50 | |

Для обеих программ используется единая инструкция.

Инструкция I.4.6.4/21,54,52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Ввести программу и подпрограмму вычисления $f_1(x)$ | | | |
| 2. Занести начальное значение $x_1$ | $x_1$ | В↑ | x |
| 3. Занести количество итераций n | n | | n |
| 4. Вычислить x | | В/О С/П | $f(x_0)$—в рег. X<br>$x_0$—в рег. 2 |

*Пример.* Найти корень уравнения $f(x) = x - e^{-x/2} = 0$ при $n = 10$ итерациях и начальном $x_1 = 1$.

Решение. $x = f_1(x) = e^{-x/2}$; подпрограмма вычисления имеет вид:

а) для программы I.4.6.4/21 /—/Pe$^x$F $\sqrt{}$ В/О

б) для программы I.4.6.4/54,52/—/Fe$^x$F $\sqrt{}$ В/О

Ответ: $\tilde{x}_0 = 0{,}703444$, $f_1(\tilde{x}_0) = 0{,}703476$; точное значение $x_0 = f_1(x_0) = 0{,}703467$.

Время вычисления примера — 30—40 с.

### I.4.7. РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Система трансцендентных уравнений представлена в виде

$$\begin{cases} x = f_1(x, y, \ldots, t), \\ y = f_2(x, y, \ldots, t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ t = f_k(x, y, \ldots, t) \end{cases}$$

и решается при задании начальных значений $x_1, y_1, \ldots, t_1$ с помощью модификации Зайделя [15] по итерационным формулам:

$$x_{m+1} = f_1(x_m, y_m, \ldots, t_m),$$
$$y_{m+1} = f_2(x_{m+1}, y_m, \ldots, t_m),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$t_{m+1} = f_k(x_{m+1}, y_{m+1}, \ldots, t_m).$$

Итерационный процесс сходится, если суммы модулей частных производных каждой функции $f_i$ по всем переменным не превышают 1.

Подробно о сходимости итерационного процесса в [15]. Подпрограмма вычисления значений $f_1$, $f_2$, ..., $f_к$ по вычисленным ранее аргументам располагается непосредственно за основной программой и заканчивается командой В/О.

При вычислении по программе I.4.7/54,52 максимальное количество уравнений k системы 13 ($k \leqslant 13$).

Подпрограмма вычисляет последовательно значение $f_1$ по предыдущим значениям $x_m$, $y_m$, ..., $t_m$, находящимся соответственно в регистрах Д, С, В, ..., 14 — k, и помещает вычисленное значение $f_1$ в регистр Д; аналогично вычисляется $f_2$ и помещается в регистр С и т.д.

Программа I.4.7/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П Д | 4Г | 09 | ПП | 53 | 18 | БП | 51 |
| 01 | 1 | 01 | 10 | 20 | 20 | 19 | 16 | 16 |
| 02 | 3 | 03 | 11 | F L 0 | 5Г | | | |
| 03 | x→П 0 | 40 | 12 | 09 | 09 | | Регистры | |
| 04 | С/П | 50 | 13 | 1 | 01 | | | |
| 05 | К x→П 0 | L0 | 14 | 4 | 04 | | 0 счетчик | |
| 06 | БП | 51 | 15 | x→П 0 | 40 | | (14—к)—Д x, y,..., t | |
| 07 | 04 | 04 | 16 | К П→x 0 | Г0 | | | |
| 08 | x→П 0 | 40 | 17 | С/П | 50 | | | |

При вычислении по программе I.4.7/52 максимальное количество уравнений к системы увеличивается до 14 ($k \leqslant 14$) за счет использования дополнительного регистра памяти Е.

При этом подпрограмма вычисляет последовательно значение $f_1$ по предыдущим значениям $x_m$, $y_m$, ..., $t_m$, находящимся в регистрах памяти Е, Д, С, ..., (15 — k), и помещает вычисленное значение в регистр Е; затем аналогично вычисляется $f_2$ и помещается в регистр Д и т. д.

Программа I.4.7/52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П Е | 4Е | 09 | ПП | 53 | 18 | БП | 51 |
| 01 | 1 | 01 | 10 | 20 | 20 | 19 | 16 | 16 |
| 02 | 4 | 04 | 11 | F L 0 | 5Г | | | |
| 03 | x→П 0 | 40 | 12 | 09 | 09 | | Регистры | |
| 04 | С/П | 50 | 13 | 1 | 01 | | | |
| 05 | К x→П 0 | L0 | 14 | 5 | 05 | 0 | счетчик | |
| 06 | БП | 51 | 15 | x→П 0 | 40 | (15—k)—Е x, y,..., t | | |
| 07 | 04 | 04 | 16 | К П→x 0 | Г0 | | | |
| 08 | x→П 0 | 40 | 17 | С/П | 50 | | | |

Для обеих программ используется единая инструкция.

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Ввести программу и подпрограмму | | | |
| 2. Занести начальные приближения | $x_1$ | В/О С/П | 13 или 14 |
| | $y_1$ | С/П | $y_1$ |
| | . . . . . | . . . . . | . . . . . |
| | $t_1$ | С/П | $t_1$ |
| 3. Занести требуемое количество итераций n и найти решение | n | БП 08 С/П | x |
| | | С/П | y |
| | | . . . . . | . . . . |
| | | С/П | t |
| 4. При необходимости уточнения результата — к п. 3 | | | |

*Пример.* Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x = \sqrt{xy + 1}, \\ y = e^{-x} \end{cases}$$

при начальных значениях $x_1 = 1$, $y_1 = 1$, выполнив 5 итераций.

Решение. Подпрограмма вычисления $f_1$ и $f_2$ имеет вид:

а) для программы I.4.7/54,52

П→ x Д П→ x С×1 + F $\sqrt{\ }$ x → П Д/—/Fe$^x$ x → П С В/О

б) для программы I.4.7/52

П→ x Е П→ xД ×1 + F $\sqrt{\ }$ x → П Е/—/Fe$^x$ x → П Д В/О

Ответ: $\tilde{x} = 1{,}1675856$, $\tilde{y} = 0{,}31111722$; точные значения $x = 1{,}1675855$, $y = 0{,}31111724$.

## I.5. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

### I.5.1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЕТЕРМИНАНТОВ

#### I.5.1.1. ВТОРОГО ПОРЯДКА

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Ввод элементов $a_{ij}$ (i,j = 1,2) производится построчно.

Программа I.5.1.1/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P 2 | 21 | 11 | P , | 43 |
| 01 | С/П | 78 | 12 | F 2 | 22 |
| 02 | ↑ | 06 | 13 | × | 26 |
| 03 | С/П | 78 | 14 | ↑ | 06 |
| 04 | × | 26 | 15 | P /—/ | 53 |
| 05 | С/П | 78 | 20 | — | 86 |
| 10 | ←→ | 16 | 21 | С/П | 78 |

| Инструкция | |
|---|---|
| В/О $a_{11}$ С/П $a_{12}$ С/П | |
| $a_{21}$ С/П $a_{22}$ С/П | |
| Регистр | |
| 2 | $a_{ij}$ |

Программа I.5.1.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | F . | 25 | 05 | F . | 25 |
| 01 | × | 12 | 06 | ←→ | 14 |
| 02 | F . | 25 | 07 | — | 11 |
| 03 | × | 12 | 08 | С/П | 50 |
| 04 | ←→ | 14 | | | |

Инструкция

В/О $a_{11}$ В↑ $a_{12}$ В↑

$a_{21}$ В↑ $a_{22}$ С/П

Время вычисления — 2 с.

*Пример.* $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = 26.$

### I.5.1.2. ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

При вычислении $D_3$ по программе I.5.1.2/21 элементы $a_{ij}$ ($i,j$ = = 1—3) вводятся построчно.

Программа I.5.1.2/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | Р4 | 41 | 35 | F6 | 62 | 74 | ↑ | 06 |
| 01 | С/П | 78 | 40 | — | 86 | 75 | F3 | 32 |
| 02 | Р2 | 21 | 41 | /—/ | 56 | 80 | × | 26 |
| 03 | С/П | 78 | 42 | ↑ | 06 | 81 | ↑ | 06 |
| 04 | Р3 | 31 | 43 | Р/—/ | 53 | 82 | F4 | 42 |
| 05 | С/П | 78 | 44 | × | 26 | 83 | — | 86 |
| 10 | Р, | 43 | 45 | Р6 | 61 | 84 | ↑ | 06 |
| 11 | С/П | 78 | 50 | С/П | 78 | 85 | Р/—/ | 53 |
| 12 | Р, | 43 | 51 | Р5 | 51 | 90 | × | 26 |
| 13 | С/П | 78 | 52 | ↑ | 06 | 91 | ↑ | 06 |
| 14 | Р, | 43 | 53 | F4 | 42 | 92 | F6 | 62 |
| 15 | С/П | 78 | 54 | × | 26 | 93 | — | 86 |
| 20 | Р7 | 71 | 55 | Р4 | 41 | 94 | В/О | 48 |
| 21 | ↑ | 06 | 60 | F7 | 72 | | | |
| 22 | F2 | 22 | 61 | ПП | 68 | Инструкция | | |
| 23 | × | 26 | 62 | FCx | 75 | | | |
| 24 | Р6 | 61 | 63 | Р6 | 61 | В/О $a_{11}$ С/П $a_{12}$ С/П | | |
| 25 | С/П | 78 | 64 | F5 | 52 | $a_{13}$ С/П ... $a_{33}$ С/П | | |
| 30 | Р8 | 81 | 65 | ↑ | 06 | | | |
| 31 | ↑ | 06 | 70 | F2 | 22 | Регистры | | |
| 32 | F4 | 42 | 71 | × | 26 | | | |
| 33 | × | 26 | 72 | Р4 | 41 | 2—8 оперативные | | |
| 34 | ↑ | 06 | 73 | F8 | 82 | | | |

При вычислении $D_3$ по программе I.5.1.2/54,52 элементы $a_{ij}$ (i,j = = 1—3) заносятся в регистры памяти 1—9 согласно таблице

$$\left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right\| \Rightarrow \left\|\begin{matrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix}\right\|.$$

Программа I.5.1.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | П→х 3 | 63 | 15 | — | 11 |
| 01 | П→х 5 | 65 | 16 | П→х 1 | 61 |
| 02 | × | 12 | 17 | × | 12 |
| 03 | П→х 2 | 62 | 18 | + | 10 |
| 04 | П→х 6 | 66 | 19 | П→х 2 | 62 |
| 05 | × | 12 | 20 | П→х 9 | 69 |
| 06 | — | 11 | 21 | × | 12 |
| 07 | П→х 7 | 67 | 22 | П→х 3 | 63 |
| 08 | × | 12 | 23 | П→х 8 | 68 |
| 09 | П→х 8 | 68 | 24 | × | 12 |
| 10 | П→х 6 | 66 | 25 | — | 11 |
| 11 | × | 12 | 26 | П→х 4 | 64 |
| 12 | П→х 5 | 65 | 27 | × | 12 |
| 13 | П→х 9 | 69 | 28 | + | 10 |
| 14 | × | 12 | 29 | С/П | 50 |

Инструкция

Ввести $a_{ij}$(i, j=1—3) согласно приведенной таблице

В/О С/П

Регистры

| | |
|---|---|
| 1 | $a_{31}$ |
| 2 | $a_{32}$ |
| 3 | $a_{33}$ |
| 4 | $a_{21}$ |
| 5 | $a_{22}$ |
| 6 | $a_{23}$ |
| 7 | $a_{11}$ |
| 8 | $a_{12}$ |
| 9 | $a_{13}$ |

Время вычисления — 10 с.

*Пример.* $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 7 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 243.$

### I.5.1.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЕТЕРМИНАНТА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Ввод элементов $a_{ij}$ производится построчно.

Программа I.5.1.3/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 1 | 41 | 25 | П→x C | 6C | 50 | П→x 1 | 61 |
| 01 | С/П | 50 | 26 | × | 12 | 51 | × | 12 |
| 02 | x→П 2 | 42 | 27 | — | 11 | 52 | /—/ | 0L |
| 03 | 4 | 04 | 28 | П→x 5 | 65 | 53 | С/П | 50 |
| 04 | x→П 4 | 44 | 29 | × | 12 | 54 | П→x 1 | 61 |
| 05 | 3 | 03 | 30 | П→x Д | 6Г | 55 | : | 13 |
| 06 | x→П 0 | 40 | 31 | П→x 8 | 68 | 56 | x→П 3 | 43 |
| 07 | С/П | 50 | 32 | × | 12 | 57 | F . | 25 |
| 08 | С/П | 50 | 33 | П→x A | 6— | 58 | П→x 2 | 62 |
| 09 | ПП | 53 | 34 | П→x B | 6L | 59 | П→x 3 | 63 |
| 10 | 53 | 53 | 35 | × | 12 | 60 | × | 12 |
| 11 | ←→ | 14 | 36 | — | 11 | 61 | С/П | 50 |
| 12 | В↑ | 0E | 37 | П→x 6 | 66 | 62 | — | 11 |
| 13 | ПП | 53 | 38 | × | 12 | 63 | К x→П 4 | L4 |
| 14 | 59 | 59 | 39 | — | 11 | 64 | F . | 25 |
| 15 | ←→ | 14 | 40 | П→x 8 | 68 | 65 | В/О | 52 |
| 16 | В↑ | 0E | 41 | П→x C | 6C | | | |
| 17 | ПП | 53 | 42 | × | 12 | | Инструкция | |
| 18 | 59 | 59 | 43 | П→x 9 | 69 | | | |
| 19 | FL0 | 5Г | 44 | П→x B | 6L | | В/О $a_{11}$ С/П $a_{12}$ С/П... | |
| 20 | 09 | 09 | 45 | × | 12 | | ... $a_{44}$ С/П | |
| 21 | П→x Д | 6Г | 46 | — | 11 | | | |
| 22 | П→x 9 | 69 | 47 | П→x 7 | 67 | | Регистры | |
| 23 | × | 12 | 48 | × | 12 | | | |
| 24 | П→x A | 6— | 49 | + | 10 | | 0—Д оперативные | |

Время вычисления после ввода одного элемента $a_{1j}$ — 1 — 3 с. Время вычисления $D_4$ после ввода $a_{44}$ — 13 с.

*Пример.*
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & -4 \\ 7 & 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 484.$$

### I.5.1.4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЕТЕРМИНАНТА ПЯТОГО ПОРЯДКА

$$D_5 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix}.$$

Ввод элементов $a_{1j}$ производится построчно.

Программа I.5.1.4/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 0 | 40 | 31 | 48 | 48 | 62 | П→x 1 | 61 |
| 01 | 4 | 04 | 32 | П→x 1 | 61 | 63 | С/П | 50 |
| 02 | x→П 1 | 41 | 33 | : | 13 | 64 | ПП | 53 |
| 03 | x→П 4 | 44 | 34 | x→П B | 4L | 65 | 75 | 75 |
| 04 | С/П | 50 | 35 | ←→ | 14 | 66 | x→П 1 | 41 |
| 05 | П→x 0 | 60 | 36 | П→x 1 | 61 | 67 | F . | 25 |
| 06 | : | 13 | 37 | : | 13 | 68 | ПП | 53 |
| 07 | К x→П 4 | L4 | 38 | x→П 8 | 48 | 69 | 71 | 71 |
| 08 | x→П Д | 4Г | 39 | ПП | 53 | 70 | × | 12 |
| 09 | П→x 9 | 69 | 40 | 48 | 48 | 71 | С/П | 50 |
| 10 | x→П A | 4— | 41 | ←→ | 14 | 72 | П→x 1 | 61 |
| 11 | Cx | 0Г | 42 | : | 13 | 73 | ПП | 53 |
| 12 | К x→П 4 | L4 | 43 | ПП | 53 | 74 | 79 | 79 |
| 13 | FL1 | 5L | 44 | 49 | 49 | 75 | П→x 2 | 62 |
| 14 | 04 | 04 | 45 | ←→ | 14 | 76 | ПП | 53 |
| 15 | x→П 9 | 49 | 46 | — | 11 | 77 | 79 | 79 |
| 16 | x→П B | 4L | 47 | F . | 25 | 78 | П→x 3 | 63 |
| 17 | ПП | 53 | 48 | 1 | 01 | 79 | К П→x 4 | Г4 |
| 18 | 54 | 54 | 49 | x→П 1 | 41 | 80 | × | 12 |
| 19 | П→x 2 | 62 | 50 | FBx | 0 | 81 | — | 11 |
| 20 | : | 13 | 51 | П→x 0 | 60 | 82 | B/O | 52 |
| 21 | x→П C | 4C | 52 | × | 12 | | | |
| 22 | ←→ | 14 | 53 | x→П 0 | 40 | | Инструкция | |
| 23 | П→x 2 | 62 | 54 | С/П | 50 | | | |
| 24 | : | 13 | 55 | x→П 3 | 43 | B/O $a_{11}$ С/П $a_{12}$ С/П... | | |
| 25 | x→П 9 | 49 | 56 | 4 | 04 | ... $a_{55}$ С/П | | |
| 26 | П→x 1 | 61 | 57 | x→П 4 | 44 | | | |
| 27 | П→x 2 | 62 | 58 | С/П | 50 | | Регистры | |
| 28 | : | 13 | 59 | ПП | 53 | | | |
| 29 | x→П 6 | 46 | 60 | 78 | 78 | | 0 $D_5$ | |
| 30 | ПП | 53 | 61 | x→П 2 | 42 | | 1—Д оперативные | |

Время вычисления после ввода одного элемента $a_{ij}$ — 2—13 с. Время вычисления $D_5$ после ввода $a_{55}$ — 10 с.

*Пример.*
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 0 & 7 \\ 2 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 980.$$

## I.5.2. ОБРАЩЕНИЕ МАТРИЦ

### I.5.2.1. ВТОРОГО ПОРЯДКА

Значения элементов исходной матрицы заносятся в регистры памяти 4,5,7,8 согласно следующей таблице:

$$a = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} 7 & 8 \\ 4 & 5 \end{Vmatrix}.$$

Полученная в результате вычисления обратная матрица заносится аналогично в те же регистры памяти

$$A = a^{-1} = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} 7 & 8 \\ 4 & 5 \end{Vmatrix}.$$

Следовательно, двукратное исполнение программы даст в результате исходную матрицу а.

Программа I.5.2.1/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | F4 | 42 | 24 | : | 36 | 52 | F3 | 32 |
| 01 | ↑ | 06 | 25 | ↑ | 06 | 53 | /—/ | 56 |
| 02 | F8 | 82 | 30 | F7 | 72 | 54 | : | 36 |
| 03 | × | 26 | 31 | ←→ | 16 | 55 | P4 | 41 |
| 04 | P3 | 31 | 32 | P7 | 71 | 60 | С/П | 78 |
| 05 | F5 | 52 | 33 | F3 | 32 | | | |
| 10 | ↑ | 06 | 34 | : | 36 | | | |
| 11 | F7 | 72 | 35 | P5 | 51 | | Регистры | |
| 12 | × | 26 | 40 | F8 | 82 | | | |
| 13 | ↑ | 06 | 41 | ↑ | 06 | | 3 детерминант | |
| 14 | F3 | 32 | 42 | F3 | 32 | | 4 $a_{21}$; $A_{21}$ | |
| 15 | — | 86 | 43 | /—/ | 56 | | 5 $a_{22}$; $A_{22}$ | |
| 20 | P3 | 31 | 44 | : | 36 | | 7 $a_{11}$; $A_{11}$ | |
| 21 | ↑ | 06 | 45 | P8 | 81 | | 8 $a_{12}$; $A_{12}$ | |
| 22 | F5 | 52 | 50 | F4 | 42 | | | |
| 23 | ←→ | 16 | 51 | ↑ | 06 | | | |

Программа I.5.2.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | П→х 5 | 65 | 12 | : | 13 | 24 | х→П 4 | 44 |
| 01 | В↑ | 0Е | 13 | х→П 5 | 45 | 25 | С/П | 50 |
| 02 | П→х 7 | 67 | 14 | F. | 25 | | | |
| 03 | × | 12 | 15 | х→П 7 | 47 | | | |
| 04 | П→х 4 | 64 | 16 | П→х 8 | 68 | | Регистры | |
| 05 | П→х 8 | 68 | 17 | П→х Д | 6Г | | | |
| 06 | × | 12 | 18 | /—/ | 0L | | 4 $a_{21}$; $A_{21}$ | |
| 07 | — | 11 | 19 | : | 13 | | 5 $a_{22}$; $A_{22}$ | |
| 08 | х→П Д | 4Г | 20 | х→П 8 | 48 | | 7 $a_{11}$; $A_{11}$ | |
| 09 | : | 13 | 21 | П→х 4 | 64 | | 8 $a_{12}$; $A_{12}$ | |
| 10 | П→х 7 | 67 | 22 | FBx | 0 | | Д детерминант | |
| 11 | П→х Д | 6Г | 23 | : | 13 | | | |

Для обеих программ используется единая инструкция.

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Занести в регистры памяти элементы исходной матрицы a | $a_{11}$<br>$a_{12}$<br>$a_{21}$<br>$a_{22}$ | x→П 7<br>x→П 8<br>x→П 4<br>x→П 5 | $a_{11}$<br>$a_{12}$<br>$a_{21}$<br>$a_{22}$ |
| 2. Вычислить обратную матрицу A | | В/О С/П | $A_{11}$—в рег. 7<br>$A_{12}$—в рег. 8<br>$A_{21}$—в рег. X,4<br>$A_{22}$—в рег. 5 |

Время вычисления — 8 с.

*Пример.* $a = \begin{Vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 7 \end{Vmatrix}$. $A = a^{-1} = \begin{Vmatrix} 0{,}7 & -0{,}3 \\ -0{,}6 & 0{,}4 \end{Vmatrix}$.

### I.5.2.2. ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

По программе производится обращение матрицы

$$a = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}$$

при ограничениях:

$$a_{11} \neq 0; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Элементы исходной матрицы $a_{ij}$ заносятся вручную в регистры памяти 1—9 согласно следующей таблице:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Обратная матрица $A = a^{-1}$ размещается в тех же регистрах памяти, но «зеркально отражена» относительно главной диагонали:

$$A = a^{-1} = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 8 & 5 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Двукратное исполнение приводит матрицу a к исходному виду.

Программа I.5.2.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | 3 | 03 | 22 | : | 13 | 44 | × | 12 |
| 01 | x→П 0 | 40 | 23 | /—/ | 0L | 45 | x→П 2 | 42 |
| 02 | П→x 5 | 65 | 24 | x→П 6 | 46 | 46 | П→x A | 6— |
| 03 | П→x 4 | 64 | 25 | × | 12 | 47 | x→П 7 | 47 |
| 04 | П→x 7 | 67 | 26 | П→x 2 | 62 | 48 | П→x C | 6C |
| 05 | : | 13 | 27 | + | 10 | 49 | x→П 9 | 49 |
| 06 | /—/ | 0L | 28 | x→П 4 | 44 | 50 | FL0 | 5Г |
| 07 | x→П C | 4C | 29 | F. | 25 | 51 | 02 | 02 |
| 08 | П→x 8 | 68 | 30 | П→x 3 | 63 | 52 | С/П | 50 |
| 09 | × | 12 | 31 | П→x 6 | 66 | | | |
| 10 | + | 10 | 32 | П→x 9 | 69 | | Регистры | |
| 11 | x→П A | 4— | 33 | × | 12 | | | |
| 12 | П→x 8 | 68 | 34 | + | 10 | | 0, A, C, оперативные | |
| 13 | П→x 6 | 66 | 35 | x→П 5 | 45 | | 1 $a_{31}$; $A_{13}$ | |
| 14 | П→x C | 6C | 36 | F. | 25 | | 2 $a_{32}$; $A_{23}$ | |
| 15 | П→x 9 | 69 | 37 | П→x 7 | 67 | | 3 $a_{33}$; $A_{33}$ | |
| 16 | × | 12 | 38 | : | 13 | | 4 $a_{21}$; $A_{12}$ | |
| 17 | + | 10 | 39 | x→П 1 | 41 | | 5 $a_{22}$; $A_{22}$ | |
| 18 | x→П 8 | 48 | 40 | П→x 9 | 69 | | 6 $a_{23}$; $A_{32}$ | |
| 19 | F. | 25 | 41 | П→x 7 | 67 | | 7 $a_{11}$; $A_{11}$ | |
| 20 | П→x 1 | 61 | 42 | F1/x | 23 | | 8 $a_{12}$; $A_{21}$ | |
| 21 | П→x 7 | 67 | 43 | x→П 3 | 43 | | 9 $a_{13}$; $A_{31}$ | |

Инструкция I.5.2.2/54,52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Занести в регистры памяти элементы исходной матрицы a | $a_{11}$ | x→П 7 | $a_{11}$ |
| | $a_{12}$ | x→П 8 | $a_{12}$ |
| | $a_{13}$ | x→П 9 | $a_{13}$ |
| | $a_{21}$ | x→П 4 | $a_{21}$ |
| | $a_{22}$ | x→П 5 | $a_{22}$ |
| | $a_{23}$ | x→П 6 | $a_{23}$ |
| | $a_{31}$ | x→П 1 | $a_{31}$ |
| | $a_{32}$ | x→П 2 | $a_{32}$ |
| | $a_{33}$ | x→П 3 | $a_{33}$ |
| 2. Вычислить обратную матрицу $A=a^{-1}$ | | В/О С/П | $A_{11}$—в рег. 7 |
| | | | $A_{12}$—в рег. 4 |
| | | | $A_{13}$—в рег. 1 |
| | | | $A_{21}$—в рег. 8 |
| | | | $A_{22}$—в рег. 5 |
| | | | $A_{23}$—в рег. 2 |
| | | | $A_{31}$—в рег. X,9 |
| | | | $A_{32}$—в рег. 6 |
| | | | $A_{33}$—в рег. 3 |

Время вычисления — 50 с.

*Пример.* $a=\begin{Vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 6 \\ 0 & 8 & -1 \end{Vmatrix}$. $A=a^{-1}=\begin{Vmatrix} -5{,}4 & 0{,}4 & 3{,}2 \\ 4{,}3 & -0{,}3 & -2{,}4 \\ -1{,}2 & 0{,}2 & 0{,}6 \end{Vmatrix}$.

### I.5.3. УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦ

#### I.5.3.1. ВТОРОГО ПОРЯДКА

Перемножаются матрицы:

$$A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} \text{ и } B=\begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{Vmatrix}.$$

В результате перемножения получаем матрицу C:

$$C=\begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{Vmatrix},$$

элементы которой определяются как

$$c_{1k}=\sum_{j=1}^{2} a_{1j}\, b_{jk}.$$

При вычислении по программе I.5.3.1/21 элементы матриц A и B вводятся построчно.

Программа I.5.3.1/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | Р4 | 41 | 35 | Р8 | 81 | 74 | ↑ | 06 |
| 01 | С/П | 78 | 40 | F5 | 52 | 75 | Р, | 43 |
| 02 | Р8 | 81 | 41 | ↑ | 06 | 80 | + | 96 |
| 03 | С/П | 78 | 42 | Р, | 43 | 81 | В/О | 48 |
| 04 | Р5 | 51 | 43 | + | 96 | | | |
| 05 | С/П | 78 | 44 | Р5 | 51 | | Инструкция | |
| 10 | Р6 | 61 | 45 | С/П | 78 | | | |
| 11 | ПП | 68 | 50 | F4 | 42 | В/О $a_{11}$ С/П $a_{12}$ С/П | | |
| 12 | Р5 | 51 | 51 | С/П | 78 | $a_{21}$ С/П $a_{22}$ С/П $в_{11}$ С/П | | |
| 13 | ПП | 68 | 52 | ←→ | 16 | $в_{12}$ С/П | | |
| 14 | Р5 | 51 | 53 | × | 26 | $в_{21}$ С/П $в_{22}$ С/П | | |
| 15 | Р, | 43 | 54 | Р, | 43 | Результат | | |
| 20 | Р, | 43 | 55 | F5 | 52 | $c_{11}$—в рег. 7 | | |
| 21 | ПП | 68 | 60 | × | 26 | $c_{12}$—в рег. 8 | | |
| 22 | 6 | 64 | 61 | Р, | 43 | $c_{21}$—в рег. 4 | | |
| 23 | Р7 | 71 | 62 | В/О | 48 | $c_{22}$—в рег. X,5 | | |
| 24 | F5 | 52 | 63 | F6 | 62 | | | |
| 25 | ↑ | 06 | 64 | С/П | 78 | | Регистры | |
| 30 | Р, | 43 | 65 | ←→ | 16 | 3; 6 оперативные | | |
| 31 | + | 96 | 70 | × | 26 | 4 $c_{21}$ | | |
| 32 | Р4 | 41 | 71 | Р5 | 51 | 5 $c_{22}$ | | |
| 33 | ПП | 68 | 72 | F8 | 82 | 7 $c_{11}$ | | |
| 34 | 6 | 64 | 73 | × | 26 | 8 $c_{12}$ | | |

При вычислении по программе I.5.3.1/54,52 ввод матриц A и B и вывод матрицы C производятся с использованием регистров памяти 0 — B согласно следующей таблице:

$$\left\|\begin{matrix} a_{11} & b_{11} & c_{11} \\ a_{12} & b_{12} & c_{12} \\ a_{21} & b_{21} & c_{21} \\ a_{22} & b_{22} & c_{22} \end{matrix}\right\| \Rightarrow \left\|\begin{matrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & A & B \end{matrix}\right\|.$$

Элементы матрицы A вводятся в первый столбец регистров памяти — 0,1, 4, 7; элементы матрицы B — во второй столбец регистров памяти — A, 2,5,8 и после вычисления элементы матрицы C выводятся в третий столбец регистров памяти — регистры B, 3, 6, 9.

Программа I.5.3.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | П→х 7 | 67 | 16 | П→х 1 | 61 | 32 | С/П | 50 |
| 01 | П→х 8 | 68 | 17 | П→х 8 | 68 | | | |
| 02 | × | 12 | 18 | × | 12 | | Регистры | |
| 03 | П→х 4 | 64 | 19 | П→х 0 | 60 | | | |
| 04 | П→х 2 | 62 | 20 | П→х 2 | 62 | 0 | $a_{22}$ | |
| 05 | × | 12 | 21 | × | 12 | 1 | $a_{21}$ | |
| 06 | + | 10 | 22 | + | 10 | 2 | $b_{21}$ | |
| 07 | х→П 9 | 49 | 23 | х→П 3 | 43 | 3 | $c_{21}$ | |
| 08 | П→х 7 | 67 | 24 | П→х 1 | 61 | 4 | $a_{12}$ | |
| 09 | П→х 5 | 65 | 25 | П→х 5 | 65 | 5 | $b_{12}$ | |
| 10 | × | 12 | 26 | × | 12 | 6 | $c_{12}$ | |
| 11 | П→х 4 | 64 | 27 | П→х 0 | 60 | 7 | $a_{11}$ | |
| 12 | П→х A | 6— | 28 | П→х A | 6— | 8 | $b_{11}$ | |
| 13 | × | 12 | 29 | × | 12 | 9 | $c_{11}$ | |
| 14 | + | 10 | 30 | + | 10 | A | $b_{22}$ | |
| 15 | х→П 6 | 46 | 31 | х→П B | 4L | B | $c_{22}$ | |

Инструкция I.5.3.1/54,52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Занести элементы матрицы A | $a_{11}$ | х→П 7 | $a_{11}$ |
| | $a_{12}$ | х→П 4 | $a_{12}$ |
| | $a_{21}$ | х→П 1 | $a_{21}$ |
| | $a_{22}$ | х→П 0 | $a_{22}$ |
| 2. Ввести элементы матрицы B | $b_{11}$ | х→П 8 | $b_{11}$ |
| | $b_{12}$ | х→П 5 | $b_{12}$ |
| | $b_{21}$ | х→П 2 | $b_{21}$ |
| | $b_{22}$ | х→П A | $b_{22}$ |
| 3. Вычислить матрицу C | | В/О С/П | $c_{11}$—в рег. 9<br>$c_{12}$—в рег. 6<br>$c_{21}$—в рег. 3<br>$c_{22}$—в рег. X,B |

Время вычисления — 10 с.

*Пример.* $A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix}$, $B = \begin{Vmatrix} 3 & -7 \\ 8 & 1 \end{Vmatrix}$. $C = \begin{Vmatrix} 19 & -5 \\ 41 & -17 \end{Vmatrix}$.

### I.5.3.2. ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Перемножаются матрицы A и B:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{Vmatrix}.$$

В результате перемножения получаем матрицу C:

$$C = \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{Vmatrix},$$

элементы которой определяются как [14]

$$c_{1k} = \sum_{j=1}^{3} a_{1j} b_{jk}.$$

Элементы матрицы B заносятся в регистры памяти 1—9 согласно схеме

$$\begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Затем элементы матрицы A вводятся построчно.

После ввода каждой строки матрицы A вычисляются значения соответствующей строки матрицы C, которые заносятся в регистры памяти A, B, C согласно инструкции. Командами П→ x A, П→ x B, П→xC элементы матрицы C выводятся в регистр X и считываются.

Программа I.5.3.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | B↑ | 0E | 17 | + | 10 |
| 01 | 1 | 01 | 18 | x→П C | 4C |
| 02 | 0 | 00 | 19 | F. | 25 |
| 03 | x→П 0 | 40 | 20 | B↑ | 0E |
| 04 | Cx | 0Г | 21 | КП→x 0 | Г0 |
| 05 | x→П A | 4— | 22 | × | 12 |
| 06 | x→П B | 4L | 23 | П→xB | 6L |
| 07 | x→П C | 4C | 24 | + | 10 |
| 08 | + | 10 | 25 | x→П B | 4L |
| 09 | ПП | 53 | 26 | F. | 25 |
| 10 | 13 | 13 | 27 | КП→x 0 | ГО |

| | Регистры |
|---|---|
| 0 | оперативный |
| 1 | $B_{31}$ |
| 2 | $B_{32}$ |
| 3 | $B_{33}$ |
| 4 | $B_{21}$ |
| 5 | $B_{22}$ |
| 6 | $B_{23}$ |
| 7 | $B_{11}$ |
| 8 | $B_{12}$ |

*Продолжение*

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 11 | ПП | 53 | 28 | × | 12 |
| 12 | 13 | 13 | 29 | П→х А | 6— |
| 13 | В↑ | 0Е | 30 | + | 10 |
| 14 | К П→х 0 | Г0 | 31 | х→П А | 4— |
| 15 | × | 12 | 32 | С/П | 50 |
| 16 | П→х С | 6С | 33 | В/О | 52 |

Регистры

| | |
|---|---|
| 9 | $в_{13}$ |
| В | $с_{11}$; $с_{21}$; $с_{31}$ |
| А | $с_{12}$; $с_{22}$; $с_{32}$ |
| С | $с_{13}$; $с_{23}$; $с_{33}$ |

Инструкция I.5.3.2/54,52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Занести в регистры памяти матрицу В | $в_{11}$ | х→П 7 | $в_{11}$ |
| | $в_{12}$ | х→П 8 | $в_{12}$ |
| | $в_{13}$ | х→П 9 | $в_{13}$ |
| | $в_{21}$ | х→П 4 | $в_{21}$ |
| | $в_{22}$ | х→П 5 | $в_{22}$ |
| | $в_{23}$ | х→П 6 | $в_{23}$ |
| | $в_{31}$ | х→П 1 | $в_{31}$ |
| | $в_{32}$ | х→П 2 | $в_{32}$ |
| | $в_{33}$ | х→П 3 | $в_{33}$ |
| 2. Ввести первую строку матрицы А и считать первую строку матрицы С | | В/О | |
| | $а_{11}$ | С/П | |
| | $а_{12}$ | С/П | |
| | $а_{13}$ | С/П | $с_{11}$—в рег. X, А<br>$с_{12}$—в рег. В<br>$с_{13}$—в рег. С |
| 3. Ввести вторую строку матрицы А и считать вторую строку матрицы С | | | |
| | $а_{21}$ | С/П | |
| | $а_{22}$ | С/П | |
| | $а_{23}$ | С/П | $с_{21}$—в рег. X, А<br>$с_{22}$—в рег. В<br>$с_{23}$—в рег. С |
| 4. Ввести третью строку матрицы А и считать третью строку матрицы С | | | |
| | $а_{31}$ | С/П | |
| | $а_{32}$ | С/П | |
| | $а_{33}$ | С/П | $с_{31}$—в рег. X, А<br>$с_{32}$—в рег. В<br>$с_{33}$—в рег. С |
| 5. Для нового счета при другой матрице А — к п. 2 | | | |

Время вычисления одной строки матрицы С — 30 с.

*Пример.*

$$A=\begin{Vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ -6 & 7 & 1 \end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 7 & 5 \\ 0 & 6 & 1 \end{Vmatrix}.\quad C=\begin{Vmatrix} 9 & 55 & 19 \\ 4 & 38 & 14 \\ -4 & 31 & 42 \end{Vmatrix}.$$

### I.5.4. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДВУХ ВЕКТОРОВ

В результате перемножения векторов $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (в_1, в_2, в_3)$ получаем вектор $C = (c_1, c_2, c_3)$.

Элементы исходных векторов A, B и результирующего вектора C размещаются по столбцам в регистрах памяти согласно следующей схеме:

$$\begin{Vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Элементы вектора C вычисляются как [14] $c_1 = a_2в_3 - a_3в_2$, $c_2 = a_3в_1 - a_1в_3$, $c_3 = a_1в_2 - a_2в_1$.

Программа I.5.4/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | П→х 4 | 64 | 13 | × | 12 |
| 01 | П→х 2 | 62 | 14 | — | 11 |
| 02 | × | 12 | 15 | х→П 6 | 46 |
| 03 | П→х 1 | 61 | 16 | П→х 7 | 67 |
| 04 | П→х 5 | 65 | 17 | П→х 5 | 65 |
| 05 | × | 12 | 18 | × | 12 |
| 06 | — | 11 | 19 | П→х 4 | 64 |
| 07 | х→П 9 | 49 | 20 | П→х 8 | 68 |
| 08 | П→х 1 | 61 | 21 | × | 12 |
| 09 | П→х 8 | 68 | 22 | — | 11 |
| 10 | × | 12 | 23 | х→П 3 | 43 |
| 11 | П→х 7 | 67 | 24 | С/П | 50 |
| 12 | П→х 2 | 62 | | | |

Регистры

| | |
|---|---|
| 1 | $a_3$ |
| 2 | $в_3$ |
| 3 | $c_3$ |
| 4 | $a_2$ |
| 5 | $в_2$ |
| 6 | $c_2$ |
| 7 | $a_1$ |
| 8 | $в_1$ |
| 9 | $c_1$ |

Инструкция I.5.4/54,52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Занести матрицу A | $a_1$ | х→П 7 | $a_1$ |
| | $a_2$ | х→П 4 | $a_2$ |
| | $a_3$ | х→П 1 | $a_3$ |
| 2. Занести матрицу B | $в_1$ | х→П 8 | $в_1$ |
| | $в_2$ | х→П 5 | $в_2$ |
| | $в_3$ | х→П 2 | $в_3$ |
| 3. Вычислить матрицу C | | В/О С/П | $c_1$—в рег. 9<br>$c_2$—в рег. 6<br>$c_3$—в рег. X, 3 |
| 4. Для нового счета при другой матрице B — к п. 2 | | | |

Время вычисления — 8 с.

*Пример.* A = (2,3, — 4), B = (1,3,5). C = (27, —14,3).

## I.6. СУММЫ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ

### I.6.1. СУММА СТЕПЕНЕЙ ЧИСЕЛ НАТУРАЛЬНОГО РЯДА

$$y = 1^n + 2^n + \ldots + i^n + \ldots + m^n = \sum_{i=1}^{m} i^n.$$

Программа I.6.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 0 | 40 | 06 | П→x 1 | 61 |
| 01 | Cx | 0Г | 07 | + | 10 |
| 02 | x→П 1 | 41 | 08 | F L0 | 5Г |
| 03 | ←→ | 14 | 09 | 02 | 02 |
| 04 | П→x 0 | 60 | 10 | С/П | 50 |
| 05 | F xy | 24 | | | |

Инструкция

n В↑ m В/О С/П

Регистры
1 y
0 счетчик

Время вычисления — T = 4 · mc.
*Пример.* n = 2, m = 4. y = 30.

### I.6.2. ФАКТОРИАЛ

Факториал целого неотрицательного числа n ($0 \leqslant n \leqslant 69$) вычисляется по формуле

$$n! = \begin{cases} n(n-1) \ldots 2.1 & \text{при } n \geqslant 1; \\ 1 & \text{при } n = 0. \end{cases}$$

#### I.6.2.1. ВЫЧИСЛЕНИЕ n! ПРИ ФИКСИРОВАННОМ n

Программа I.6.2.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | ВП | 0С | 04 | × | 12 |
| 01 | x→П 0 | 40 | 05 | F L0 | 5Г |
| 02 | 1 | 01 | 06 | 03 | 03 |
| 03 | П→x 0 | 60 | 07 | С/П | 50 |

Инструкция

n В/О С/П

Регистр
0 оперативный

Время вычисления — T = (n + 2) с.
*Пример.* n = 5. n! = 120.

#### I.6.2.2. ПОШАГОВЫЙ ВЫВОД n!

При последовательном нажатии В/О С/П С/П С/П ... С/П...выводятся соответственно значения 0!, 1!, 2!, ..., n! ,...

Значения n помещаются при этом в регистр Y. Для вывода соответствующего значения n следует произвести обмен содержимого регистров X и Y командой ↔ . Для продолжения вывода n! следует восстановить прежние значения регистров X и Y командой ↔.

Программа I.6.2.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Инструкция |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | Cx | 0Г | 06 | + | 10 | В/О С/П С/П С/П... |
| 01 | К НОП | 54 | 07 | × | 12 | |
| 02 | 1 | 01 | 08 | F Bx | 0 | Результат |
| 03 | С/П | 50 | 09 | ←→ | 14 | |
| 04 | ←→ | 14 | 10 | БП | 51 | n! —в рег. X |
| 05 | 1 | 01 | 11 | 03 | 03 | n —в рег. Y |

Время вычисления одного значения n! — 2 с.
*Пример.* 0! = 1, 1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, ...

### I.6.3. СУММА ФАКТОРИАЛОВ

$$S = 1! + 2! + \ldots + n! = \sum_{i=1}^{n} i!$$

вычисляется для $1 \leqslant n \leqslant 69$.

Программа I.6.3/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Инструкция |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 0 | 40 | 06 | F L0 | 5Г | n В/О С/П |
| 01 | 1 | 01 | 07 | 02 | 02 | |
| 02 | П→x 0 | 60 | 08 | 1 | 01 | Регистр |
| 03 | × | 12 | 09 | — | 11 | |
| 04 | 1 | 01 | 10 | С/П | 50 | 0 счетчик |
| 05 | + | 10 | | | | |

Время вычисления — $T$ = (1,3n + 3) с.
*Пример.* n = 3. S = 9.

### I.6.4. ПРОИЗВЕДЕНИЕ ФАКТОРИАЛОВ

Произведение факториалов

$$P = 1! \cdot 2! \ \ldots \ n! = \prod_{i=1}^{n} i!$$

вычисляется для $1 \leqslant n \leqslant 16$.

Программа I.6.4/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Инструкция |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 0 | 40 | 07 | F. | 25 | |
| 01 | 1 | 01 | 08 | × | 12 | n В/О С/П |
| 02 | x→П 4 | 44 | 09 | × | 12 | |
| 03 | F $x^2$ | 22 | 10 | F L0 | 5Г | Регистры |
| 04 | F Bx | 0 | 11 | 04 | 04 | |
| 05 | П→x 4 | 64 | 12 | С/П | 50 | 0; 4 счетчики |
| 06 | К П→x 4 | Г4 | | | | |

Время вычисления — T = (2n + 3) с.

*Пример.* n = 3. P = 12.

### I.6.5. ФУНКЦИЯ *n*!!

Функция n!! ($1 \leqslant n \leqslant 119$) вычисляется для четных и нечетных n по формулам:

$$n!! = \begin{cases} n(n-2) \ldots 3 \cdot 1 \text{ при } n \text{ нечетном;} \\ n(n-2) \ldots 4 \cdot 2 \text{ при } n \text{ четном.} \end{cases}$$

Программа I.6.5/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Инструкция |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 0 | 40 | 05 | 06 | 06 | n В/О С/П |
| 01 | 1 | 01 | 06 | F L0 | 5Г | |
| 02 | П→x 0 | 60 | 07 | 02 | 02 | Регистр |
| 03 | × | 12 | 08 | С/П | 50 | 0 счетчик |
| 04 | F L0 | 5Г | | | | |

Время вычисления — T = (0,8 n + 2) с.

*Примеры.* n = 7. n!! = 105.

n = 8. n!! = 384.

### I.6.6. РАЗМЕЩЕНИЯ

Число размещений $A_n^m$ из n элементов по m определяется для целых положительных чисел $1 \leqslant m \leqslant n$ по формуле [13]

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)\ldots(n-m+1).$$

### I.6.6.1. ВЫЧИСЛЕНИЕ $A_n^m$ ПРИ ФИКСИРОВАННОМ m

Программа I.6.6.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П0 | 40 | 06 | F L1 | 5L |
| 01 | ←→ | 14 | 07 | 08 | 08 |
| 02 | x→П1 | 41 | 08 | F L0 | 5Г |
| 03 | 1 | 01 | 09 | 04 | 04 |
| 04 | П→x1 | 61 | 10 | С/П | 50 |
| 05 | × | 12 | | | |

Инструкция

n В↑ m В/О С/П
Регистры
0; 1 счетчики

Время вычисления — T = 1,5 (m + 1) с.
*Пример.* n = 5, m = 3. $A_5^3 = 60$.

### I.6.6.2. ПОШАГОВЫЙ ВЫВОД $A_n^m$

По программе при последовательном выполнении команд В/О С/П С/П С/П ... С/П выводятся соответственно значения $A_n^m$ (m = 0,1, ..., n—1): $A_n^0$, $A_n^1$, ..., $A_n^{n-1}$.

Значение m помещается при этом в регистр Y. Для вывода m следует выполнить команду ↔. Для продолжения вывода $A_n^m$ следует восстановить прежние значения регистров X и Y командой ↔.

Программа I.6.6.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 0 | 40 | 07 | ←→ | 14 |
| 01 | 0 | 00 | 08 | 1 | 01 |
| 02 | К НОП | 54 | 09 | + | 10 |
| 03 | 1 | 01 | 10 | ←→ | 14 |
| 04 | С/П | 50 | 11 | F L0 | 5Г |
| 05 | П→x 0 | 60 | 12 | 04 | 04 |
| 06 | × | 12 | | | |

Инструкция

n В/О С/П СП . . .
Результат
$A_n^m$ — в рег. X
m — в рег. Y
Регистр
0 оперативный

Время вывода одного значения $A_n^m$ — 3 с.
*Пример.* n = 5. $A_n^m$ = 1, 5, 20, 60, 120.

### I.6.7. СОЧЕТАНИЯ

Число сочетаний $C_n^m$ из n элементов по m определяется по формуле [13]

$$C_n^m = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}.$$

### I.6.7.1. ВЫЧИСЛЕНИЕ $C_n^m$ ПРИ ФИКСИРОВАННОМ m

По программе вычисление $C_n^m$ производится для ускорения счета с использованием более короткой из двух формул:

$$C_n^m = \begin{cases} \dfrac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!} & \text{при } m \leqslant \dfrac{n}{2}; \\ \dfrac{n(n-1)\ldots(m+1)}{(n-m)!} & \text{при } m > \dfrac{n}{2}. \end{cases}$$

Программа I.6.7.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 1 | 41 | 10 | 1 | 01 |
| 01 | ←→ | 14 | 11 | П→x 1 | 61 |
| 02 | — | 11 | 12 | × | 12 |
| 03 | x→П 0 | 40 | 13 | П→x 0 | 60 |
| 04 | F Bx | 0 | 14 | : | 13 |
| 05 | — | 11 | 15 | F L1 | 5L |
| 06 | F x⩾0 | 59 | 16 | 17 | 17 |
| 07 | 10 | 10 | 17 | F L0 | 5Г |
| 08 | F Bx | 0 | 18 | 11 | 11 |
| 09 | x→П 0 | 40 | 19 | С/П | 50 |

Инструкция

m В↑ n В/О С/П

Регистры

0; 1 счетчики

Время вычисления — $T = 2(m + 2)$ с.

*Пример*. $n = 5$, $m = 2$. $C_5^2 = 10$.

### I.6.7.2. ПОШАГОВЫЙ ВЫВОД $C_n^m$

По программе при последовательном нажатии В/О С/П С/П С/П... выводятся соответственно значения $C_n^0$, $C_n^1$, $C_n^2$, ... ($m = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$).

Значение m помещается при этом в регистр Y. Для вывода m следует выполнить команду ←→. Для продолжения вывода $C_n^m$ следует восстановить прежние значения регистров X и Y командой ←→.

Программа I.6.7.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 0 | 40 | 08 | 1 | 01 |
| 01 | 0 | 00 | 09 | + | 10 |
| 02 | К НОП | 54 | 10 | : | 13 |
| 03 | 1 | 01 | 11 | F Bx | 0 |
| 04 | С/П | 50 | 12 | ←→ | 14 |
| 05 | П→x 0 | 60 | 13 | F L0 | 5Г |
| 06 | × | 12 | 14 | 04 | 04 |
| 07 | ←→ | 14 | | | |

Инструкция

В/О n С/П С/П...

Результат $C_n^m$ — в рег. X

m — в рег. Y

Регистр

0 оперативный

Время вычисления одного значения $C_n^m$ — 3 с.

*Пример.* n = 6. $C_n^m$ = 1, 6, 15, 20, 15, 6.

### I.6.8. МУЛЬТИНОМИАЛЬНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

Определяются мультиномиальные коэффициенты [11]

$$P(n, n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \ldots n_k!},$$

где $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$; $0 \leqslant n_1 \leqslant n$, представляющие собой число сочетаний из n элементов k различных видов, причем $n_1$ — число одинаковых элементов 1-го вида, $n_2$ — 2-го и т. д.

Частным случаем мультиномиальных коэффициентов при k = 2 являются биномиальные коэффициенты $C_n^m$.

Для уменьшения ошибки вычислений применен алгоритм

$$P = \left[\frac{n\,(n-1)\ldots(n-n_1+1)}{n_1!}\right] \cdot \left[\frac{(n-n_1)\,(n-n_1-1)\ldots(n-n_1-n_2+1)}{n_2!}\right] \ldots$$

$$\ldots \left[\frac{(n-n_1-\ldots-n_{k-1})\ldots 2.1}{n_k!}\right].$$

Программа I.6.8/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 0 | 40 | 11 | П→x 0 | 60 |
| 01 | 1 | 01 | 12 | × | 12 |
| 02 | С/П | 50 | 13 | ←→ | 14 |
| 03 | ВП | 0С | 14 | F L0 | 5Г |
| 04 | x→П 1 | 41 | 15 | 16 | 16 |
| 05 | F. | 25 | 16 | F L1 | 5L |
| 06 | 1 | 01 | 17 | 08 | 08 |
| 07 | В↑ | 0Е | 18 | : | 13 |
| 08 | П→x 1 | 61 | 19 | × | 12 |
| 09 | × | 12 | 20 | БП | 51 |
| 10 | ←→ | 14 | 21 | 02 | 02 |

Инструкция

n В/О С/П
$n_1$ С/П
$n_2$ С/П
. . . . . .
$n_k$ С/П

Регистры

0; 1 счетчики

Ошибку вычислений можно уменьшить, вводя значения $n_1$ в порядке убывания их величины.

*Пример.* $P(10, 5, 3, 2) = \frac{10!}{5!\,3!\,2!} = 2520.$

Время вычисления — 27 с.

## I.7. ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Вычисляются функции комплексной переменной, представленной в алгебраической форме

$$z = a + ib$$

или в показательной форме

$$z = \rho e^{i\varphi}.$$

Результаты вычислений представляются в алгебраической форме.

### I.7.1. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ, ВОЗВЕДЕНИЕ В СТЕПЕНЬ

Выполняются сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел

$$z_1 = a + ib \text{ и } z_2 = c + id.$$

Программа I.7.1/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P 3 | 31 | 33 | + | 96 | 70 | F 2 | 22 |
| 01 | ↔ | 16 | 34 | F 1/x | 45 | 71 | × | 26 |
| 02 | P 2 | 21 | 35 | ↑ | 06 | 72 | ↑ | 06 |
| 03 | С/П | 78 | 40 | F 5 | 52 | 73 | F 5 | 52 |
| 04 | /—/ | 56 | 41 | × | 26 | 74 | — | 86 |
| 05 | ↔ | 16 | 42 | P 5 | 51 | 75 | P 2 | 21 |
| 10 | /—/ | 56 | 43 | F 4 | 42 | 80 | F 4 | 42 |
| 11 | ↔ | 16 | 44 | × | 26 | 81 | ↑ | 06 |
| 12 | P 6 | 61 | 45 | ↑ | 06 | 82 | F 3 | 32 |
| 13 | F 2 | 22 | 50 | F 5 | 52 | 83 | × | 26 |
| 14 | + | 96 | 51 | P 5 | 51 | 84 | ↑ | 06 |
| 15 | P 2 | 21 | 52 | ↔ | 16 | 85 | F 6 | 62 |
| 20 | F 3 | 32 | 53 | P 4 | 41 | 90 | + | 96 |
| 21 | БП | 58 | 54 | F 2 | 22 | 91 | ↑ | 06 |
| 22 | F— | 85 | 55 | × | 26 | 92 | F 2 | 22 |
| 23 | /—/ | 56 | 60 | P 6 | 61 | 93 | ↔ | 16 |
| 24 | P 5 | 51 | 61 | F 3 | 32 | 94 | БП | 58 |
| 25 | F $x^2$ | 55 | 62 | × | 26 | 95 | P 0 | 01 |
| 30 | ↔ | 16 | 63 | P 5 | 51 | | | |
| 31 | P 4 | 41 | 64 | F 4 | 42 | | | |
| 32 | F $x^2$ | 55 | 65 | ↑ | 06 | | | |

Регистры 2—6 оперативные

Инструкция I.7.1/21

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Занести первый операнд $z_1 = a + ib$ | a | ↑ | a |
| | в | В/О С/П | a |
| 2. Занести второй операнд $z_2 = c + id$ | c | ↑ | c |
| | d | | d |
| 3. Выполнить одно из действий: | | | |
| а) сложение | | БП Р ↔ С/П | a — в рег. X, 2 |
| б) вычитание | | С/П | |
| в) умножение | | БП F 5 С/П | b — в рег. Y, 3 |
| г) деление | | БП 2 С/П | |
| 4. Для выполнения операции, в которой используется результат предыдущей и следующее число, — к п. 2 | | | |

Время сложения — 3 с, вычитания — 4 с, умножения — 5 с, деления — 7 с.

*Примеры.*

$(3 + i4) + (1 + i2) = 4 + i6;$

$(3 + i4) - (1 + i2) = 2 + i2;$

$(3 + i4) \times (1 + i2) = -5 + i10;$

$(3 + i4) : (1 + i2) = 2{,}2 - i0{,}4;$

$$\frac{(3+i5)+(1+i2)}{3+i4} \times (3 - i2) - (4 - i1{,}5) = 1{,}2 - i1{,}1.$$

Программа I. 7.1/54, 52 работает в радианах.

Программа I.7.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | В/О | 52 | 32 | × | 12 | 64 | × | 12 |
| 01 | x→П 1 | 41 | 33 | П→x 3 | 63 | 65 | П→x 1 | 61 |
| 02 | ↔ | 14 | 34 | П→x 1 | 61 | 66 | F sin | 1C |
| 03 | x→П 0 | 40 | 35 | × | 12 | 67 | П→x 0 | 60 |
| 04 | С/П | 50 | 36 | — | 11 | 68 | × | 12 |
| 05 | /—/ | 0L | 37 | П→x 0 | 60 | 69 | В/О | 52 |
| 06 | ↔ | 14 | 38 | П→x 3 | 63 | 70 | П→x 0 | 60 |
| 07 | /—/ | 0L | 39 | × | 12 | 71 | В↑ | 0E |
| 08 | ↔ | 14 | 40 | П→x 1 | 61 | 72 | F $x^2$ | 22 |
| 09 | П→x 1 | 61 | 41 | П→x 2 | 62 | 73 | П→x 1 | 61 |
| 10 | + | 10 | 42 | × | 12 | 74 | F $x^2$ | 22 |
| 11 | ↔ | 14 | 43 | + | 10 | 75 | + | 10 |

*Продолжение*

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 | П→x 0 | 60 | 44 | B/O | 52 | 76 | F $\sqrt{}$ | 21 |
| 13 | + | 10 | 45 | x→П 3 | 43 | 77 | : | 13 |
| 14 | ←→ | 14 | 46 | ←→ | 14 | 78 | F Bx | 0 |
| 15 | B/O | 52 | 47 | x→П 2 | 42 | 79 | ←→ | 14 |
| 16 | /—/ | 0L | 48 | ПП | 53 | 80 | F $\cos^{-1}$ | 1— |
| 17 | x→П 3 | 43 | 49 | 70 | 70 | 81 | П→x 1 | 61 |
| 18 | ←→ | 14 | 50 | x→П 1 | 41 | 82 | F x<0 | 5C |
| 19 | B↑ | 0E | 51 | ←→ | 14 | 83 | 87 | 87 |
| 20 | F $x^2$ | 22 | 52 | F ln | 18 | 84 | F. | 25 |
| 21 | П→x 3 | 63 | 53 | x→П 0 | 40 | 85 | /—/ | 0L |
| 22 | F $x^2$ | 22 | 54 | П→x 2 | 62 | 86 | B↑ | 0E |
| 23 | + | 10 | 55 | ПП | 53 | 87 | F. | 25 |
| 24 | : | 13 | 56 | 32 | 32 | 88 | B/O | 52 |
| 25 | П→x 3 | 63 | 57 | x→П 1 | 41 | | | |
| 26 | F Bx | 0 | 58 | ←→ | 14 | | | |
| 27 | : | 13 | 59 | F $e^x$ | 16 | | Регистры | |
| 28 | x→П 3 | 43 | 60 | x→П 0 | 40 | | 0 a | |
| 29 | ←→ | 14 | 61 | П→x 1 | 61 | | 1 в | |
| 30 | x→П 2 | 42 | 62 | F cos | 1Г | | 2 c | |
| 31 | П→x 0 | 60 | 63 | П→x 0 | 60 | | 3 d | |

Инструкция I.7.1/54,52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Переключатель Р/Г — в положение Р | | | |
| 2. Занести первый операнд $z_1 = a + ib$ | a<br>в | B↑<br>B/O С/П | a<br>a |
| 3. Занести второй операнд $z_2 = c + id$ | c<br>d | B↑ | c<br>d |
| 4. Выполнить одно из действий:<br>а) сложение<br>б) вычитание<br>в) умножение<br>г) деление<br>д) возведение в степень | | БП 09 С/П<br>БП 05 С/П<br>БП 28 С/П<br>БП 16 С/П<br>БП 45 С/П | a—в рег. X, 0<br>b—в рег. Y, 1 |
| 5. Перевод числа $a + ib$ в показательную форму $\rho e^{i\varphi}$ | a<br>b | B↑<br>B/O С/П<br>БП 70 С/П | a<br>ρ—в рег. X, 0<br>φ—в рег. Y, 1 |
| 6. Перевод числа $\rho e^{i\varphi}$ в алгебраическую форму $a + ib$ | ρ<br>φ | B↑<br>B/O С/П<br>БП 61 С/П | ρ<br>ρ<br>a—в рег. X, 0<br>b—в рег. Y, 1 |

Время выполнения арифметических действий — от 5 до 10 с, возведения в степень — 22 с, перевода из одной формы в другую — 8 с.

*Примеры.*

1. $(1+i2)+(3+i4)=4+i6;$
2. $(3-i4)-(1+i2)=2-i6;$
3. $(1+i2)\times(3+i4)=-5+i10;$
4. $(1+i2):(3+i4)=0{,}44+i0{,}08;$
5. $\dfrac{(2+i3)+(4-i5)}{(1-i2)}\times(2-i5)=14-i6;$
6. $(3+i4)^{(3+i4)}=-2{,}9980+i\,0{,}62379;$
7. $\sqrt{3+i4}=(3+i4)^{(0,5+i0)}=2+i1;$
8. $2^{i3}=-0{,}487+i0{,}8734;$
9. $3+4i=5e^{i0{,}9273}.$

### I.7.2. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ, ЭКСПОНЕНТА, ЛОГАРИФМ

Расчетные формулы [11]:

$$\sin(a+ib)=\sin a\cdot\operatorname{ch} b+i\cos a\cdot\operatorname{sh} b;$$

$$\cos(a+ib)=\cos a\cdot\operatorname{ch} b-i\sin a\cdot\operatorname{sh} b;$$

$$\operatorname{tg}(a+ib)=\frac{\sin 2a+i\operatorname{sh}2b}{2(\cos^2 a\cdot\operatorname{ch}^2 b+\sin^2 a\cdot\operatorname{sh}^2 b)};$$

$$\operatorname{sh}(a+ib)=\operatorname{sh} a\cdot\cos b+i\cdot\operatorname{ch} a\cdot\sin b;$$

$$\operatorname{ch}(a+ib)=\operatorname{ch} a\cdot\cos b+i\operatorname{sh} a\cdot\sin b;$$

$$\operatorname{th}(a+ib)=\frac{\operatorname{sh}2a+i\sin 2b}{2(\operatorname{ch}^2 a\cdot\cos^2 b+\operatorname{sh}^2 a\cdot\sin^2 b)};$$

$$e^{a+ib}=\rho e^{i\varphi}=e^a\cdot e^{i\varphi};$$

$$\ln(a+ib)=\ln(\rho e^{i\varphi})=\ln\rho+i\varphi\quad(-\pi<\varphi\leqslant\pi),$$

$$\rho=\sqrt{a^2+b^2},\quad\varphi=\operatorname{sign} b\cdot\arccos\frac{a}{\rho}\quad(-\pi<\varphi\leqslant\pi);$$

$$a=\rho\cos\varphi,\quad b=\rho\sin\varphi.$$

Программа I.7.2/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | В/О | 48 | 33 | В/О | 48 | 70 | Р 6 | 61 |
| 01 | Р 3 | 31 | 34 | Р 3 | 31 | 71 | F 4 | 42 |
| 02 | ←→ | 16 | 35 | ←→ | 16 | 72 | Р cos | 83 |
| 03 | Р 2 | 21 | 40 | /—/ | 56 | 73 | × | 26 |
| 04 | С/П | 78 | 41 | 2 | 24 | 74 | Р 7 | 71 |
| 05 | Р $e^x$ | 33 | 42 | × | 26 | 75 | F 6 | 62 |
| 10 | ←→ | 16 | 43 | ↑ | 06 | 80 | ↑ | 06 |
| 11 | Р sin | 93 | 44 | Рπ | 23 | 81 | F 5 | 52 |
| 12 | × | 26 | 45 | + | 96 | 82 | + | 96 |
| 13 | Р 4 | 41 | 50 | 2 | 24 | 83 | ↑ | 06 |
| 14 | F 3 | 32 | 51 | : | 36 | 84 | F 4 | 42 |
| 15 | Р cos | 83 | 52 | Р 4 | 41 | 85 | Р sin | 93 |
| 20 | × | 26 | 53 | F 3 | 32 | 90 | × | 26 |
| 21 | ↑ | 06 | 54 | Р $e^x$ | 33 | 91 | ↑ | 06 |
| 22 | F 4 | 42 | 55 | ↑ | 06 | 92 | F 7 | 72 |
| 23 | В/О | 48 | 60 | F 1/x | 45 | 93 | В/О | 48 |
| 24 | Р 3 | 31 | 61 | Р 5 | 51 | Регистры | | |
| 25 | ←→ | 16 | 62 | — | 86 | 2 а | | |
| 30 | ПП | 68 | 63 | 2 | 24 | 3 в | | |
| 31 | Р /—/ | 53 | 64 | : | 36 | 4—7 оперативные | | |
| 32 | ←→ | 16 | 65 | ↑ | 06 | | | |

Инструкция I.7.2/21

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Занести исходное число: | | | |
| а) если число задано в алгебраической форме a+ib | a<br>b | ↑<br>В/О С/П | a<br>a |
| б) если число задано в показательной форме $\rho e^{i\varphi}$ | ρ<br>φ | ↑<br>В/О С/П<br>БП Р 1 С/П | ρ<br>ρ<br>a—в рег. X, 2<br>b—в рег. Y, 3 |
| 2. Вычислить составляющие одной из функций: | | | |
| а) $e^z$<br>б) sin z<br>в) cos z<br>г) sh z<br>д) ch z | | БП ↑ С/П<br>БП Р /—/ С/П<br>БП F4 С/П<br>БП F × С/П<br>БП F ÷ С/П | a—в рег. X, 2<br>b—в рег. Y, 3 |
| 3. Для вычисления функции от полученного результата выполнить | | F 2 ↑ F 3<br>В/О С/П | b<br>a |
| 4. Идти к п. 2 | | | |

Время вычисления — 9 — 12 с.

*Примеры.*

$$e^{3+i4} = -13{,}129 - i15{,}201;$$

$$\sin(3+i4) = 3{,}8537 - i27{,}017;$$

$$\cos(3+i4) = -27{,}035 - i3{,}8512;$$

$$\mathrm{sh}(3+i4) = -6{,}5481 - i7{,}6192;$$

$$\mathrm{ch}(3+i4) = -6{,}5807 - i7{,}5815;$$

$$2e^{i1} = 1{,}0806 + i1{,}6829.$$

Программа I.7.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | В/О | 52 | 34 | ←→ | 14 | 68 | 42 | 42 |
| 01 | x→П 3 | 43 | 35 | F ln | 18 | 69 | F $x^{\frac{1}{2}}$ | 22 |
| 02 | ←→ | 14 | 36 | ←→ | 14 | 70 | ←→ | 14 |
| 03 | x→П 2 | 42 | 37 | В/О | 52 | 71 | F $x^2$ | 22 |
| 04 | С/П | 50 | 38 | ПП | 53 | 72 | + | 10 |
| 05 | F $e^x$ | 16 | 39 | 48 | 48 | 73 | 2 | 02 |
| 06 | x→П 0 | 40 | 40 | ←→ | 14 | 74 | × | 12 |
| 07 | ←→ | 14 | 41 | В/О | 52 | 75 | x→П 5 | 45 |
| 08 | F cos | 1Г | 42 | ←→ | 14 | 76 | 0 | 00 |
| 09 | × | 12 | 43 | /—/ | 0L | 77 | П→x 2 | 62 |
| 10 | П→x 0 | 60 | 44 | 1 | 01 | 78 | 2 | 02 |
| 11 | П→x 3 | 63 | 45 | F $\sin^{-1}$ | 19 | 79 | × | 12 |
| 12 | F sin | 1С | 46 | + | 10 | 80 | ПП | 53 |
| 13 | × | 12 | 47 | ←→ | 14 | 81 | 48 | 48 |
| 14 | В/О | 52 | 48 | F $e^x$ | 16 | 82 | П→x 5 | 65 |
| 15 | В ↑ | 0Е | 49 | В↑ | 0Е | 83 | : | 13 |
| 16 | F $x^2$ | 22 | 50 | F 1/x | 23 | 84 | П→x 3 | 63 |
| 17 | П→x 3 | 63 | 51 | x→П 0 | 40 | 85 | 2 | 02 |
| 18 | F $x^2$ | 22 | 52 | + | 10 | 86 | × | 12 |
| 19 | x→П 0 | 40 | 53 | 2 | 02 | 87 | F sin | 1С |
| 20 | + | 10 | 54 | : | 13 | 88 | П→x 5 | 65 |
| 21 | F $\sqrt{}$ | 21 | 55 | x→П 1 | 41 | 89 | : | 13 |
| 22 | : | 13 | 56 | ←→ | 14 | 90 | В/О | 52 |
| 23 | F Bx | 0 | 57 | x→П 4 | 44 | 91 | x→П 3 | 43 |
| 24 | ←→ | 14 | 58 | F sin | 1С | 92 | ←→ | 14 |
| 25 | F $\cos^{-1}$ | 1— | 59 | × | 12 | 93 | x→П 2 | 42 |
| 26 | П→x 3 | 63 | 60 | П→x 1 | 61 | 94 | ПП | 53 |
| 27 | П→x 0 | 60 | 61 | П→x 0 | 60 | 95 | 67 | 67 |
| 28 | F $\sqrt{}$ | 21 | 62 | — | 11 | 96 | ←→ | 14 |
| 29 | : | 13 | 63 | П→x 4 | 64 | 97 | В/О | 52 |
| 30 | × | 12 | 64 | F cos | 1Г | | Регистры | |
| 31 | В/О | 52 | 65 | × | 12 | | 2 а | |
| 32 | ПП | 53 | 66 | В/О | 52 | | 3 в | |
| 33 | 15 | 15 | 67 | ПП | 53 | | 0, 4, 5 оперативные | |

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Переключатель Р/Г — в положение Р | | | |
| 2. Занести исходное число: | | | |
| а) если число задано в алгебраической форме $a + bi$ | a | В↑ | a |
| | b | В/О С/П | |
| б) если число задано в показательной форме $\rho e^{i\varphi}$ | ρ | В↑ | ρ |
| | φ | В/О С/П | ρ |
| | | ЬП 06 С/П | a—в рег. X, 2<br>b—в рег. Y, 3 |
| 3. Вычислить составляющие одной из функций: | | | |
| а) $e^z$ | | БП 05 С/П | a—в рег. X, 2<br>b—в рег, Y, 3 |
| б) $\ln z$ | | БП 32 С/П | |
| в) $\sin z$ | | БП 47 С/П | |
| г) $\cos z$ | | БП 44 С/П | |
| д) $\operatorname{tg} z$ | | БП 91 С/П | |
| е) $\operatorname{sh} z$ | | БП 38 С/П | |
| ж) $\operatorname{ch} z$ | | БП 42 С/П | |
| з) $\operatorname{th} z$ | | БП 67 С/П | |
| 4. Для вычисления тех же функций от полученного результата выполнить и перейти к п. 3 | | П→x 2 П→x 3<br>В/О С/П | b<br>a |
| 5. Для перевода результата в показательную форму $\rho e^{i\varphi}$ | | П→x 2 П→x 3<br>В/О С/П<br>БП 15 С/П | b<br>a<br>ρ—в рег. X, 2<br>φ—в рег. Y, 3 |

Время вычисления тангенса — 30 с, перевода из одной формы в другую — 8 с, остальные функции — по 12 с.

*Примеры.*

$$e^{3+i4} = -13{,}129 - i15{,}201;$$
$$\ln(3+i4) = 1{,}6094 + i0{,}92730;$$
$$\sin(3+i4) = 3{,}8537 - i27{,}017;$$
$$\cos(3+i4) = -27{,}035 - i3{,}8512;$$
$$\operatorname{tg}(3+i4) = -1{,}873 \cdot 10^{-4} + i0{,}99936;$$
$$\operatorname{sh}(3+i4) = -6{,}5481 - i7{,}6192;$$
$$\operatorname{ch}(3+i4) = -6{,}5807 - i7{,}5816;$$
$$\operatorname{th}(3+i4) = 1{,}00071 + i4{,}908 \cdot 10^{-3};$$
$$(3+i4) = 5e^{i0{,}9273} = 5e^{i53{,}130^\circ} = 5e^{i59{,}033\ \text{град.}}$$
$$2e^{i1} = 1{,}0806 + i1{,}6829.$$

## I.7.3. ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Расчетные формулы [11]:

$$\arcsin z = \arcsin B + i \ln [A + \sqrt{A^2 - 1}];$$

$$\arccos z = \arccos B - i \ln [A + \sqrt{A^2 - 1}];$$

$$\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2a}{1 - a^2 - b^2} + i \frac{1}{2} \ln \sqrt{\frac{a^2 + (b+1)^2}{a^2 + (b-1)^2}},$$

где $z = a + ib$;

$$A = \frac{1}{2} [\sqrt{(a+1)^2 + b^2} + \sqrt{(a-1)^2 + b^2}];$$

$$B = \frac{1}{2} [\sqrt{(a+1)^2 + b^2} - \sqrt{(a-1)^2 + b^2}];$$

$$\operatorname{arsh} z = -i \arcsin (iz);$$

$$\operatorname{arch} z = \pm i \arccos z;$$

$$\operatorname{arth} z = -i \operatorname{arctg} (iz).$$

Программа I.7.3/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | В/О | 52 | 35 | П→x2 | 62 | 70 | П→x 2 | 62 |
| 01 | x→П 3 | 43 | 36 | /—/ | 0L | 71 | F $x^2$ | 22 |
| 02 | ←→ | 14 | 37 | 1 | 01 | 72 | П→x 3 | 63 |
| 03 | x→П 2 | 42 | 38 | + | 10 | 73 | F $x^2$ | 22 |
| 04 | С/П | 50 | 39 | F $x^2$ | 22 | 74 | + | 10 |
| 05 | ПП | 53 | 40 | П→x 3 | 63 | 75 | 1 | 01 |
| 06 | 12 | 12 | 41 | F $x^2$ | 22 | 76 | — | 11 |
| 07 | /—/ | 0L | 42 | + | 10 | 77 | : | 13 |
| 08 | П→x B | 6L | 43 | F $\sqrt{}$ | 21 | 78 | F $tg^{-1}$ | 1L |
| 09 | F $\cos^{-1}$ | 1— | 44 | В/О | 52 | 79 | 2 | 02 |
| 10 | ←→ | 14 | 45 | x→П 3 | 43 | 80 | : | 13 |
| 11 | В/О | 52 | 46 | ←→ | 14 | 81 | В/О | 52 |
| 12 | ПП | 53 | 47 | /—/ | 0L | 82 | /—/ | 0L |
| 13 | 32 | 32 | 48 | x→П 2 | 42 | 83 | ←→ | 14 |
| 14 | — | 11 | 49 | ПП | 53 | 84 | x→П 2 | 42 |
| 15 | FBx | 0 | 50 | 12 | 12 | 85 | ПП | 53 |
| 16 | ←→ | 14 | 51 | ←→ | 14 | 86 | 59 | 59 |
| 17 | 2 | 02 | 52 | /—/ | 0L | 87 | БП | 51 |
| 18 | : | 13 | 53 | В/О | 52 | 88 | 56 | 56 |
| 19 | x→П | 4L | 54 | ПП | 53 | 89 | П→x 2 | 62 |
| 20 | + | 10 | 55 | 05 | 05 | 90 | П→x 3 | 63 |
| 21 | П→x B | 6L | 56 | /—/ | 0L | 91 | F cos | 1Г |
| 22 | F $\sin^{-1}$ | 19 | 57 | ←→ | 14 | 92 | × | 12 |
| 23 | ←→ | 14 | 58 | В/О | 52 | 93 | П→x 2 | 62 |
| 24 | B↑ | 0E | 59 | ←→ | 14 | 94 | П→x 3 | 63 |
| 25 | F $x^2$ | 22 | 60 | /—/ | 0L | 95 | F sin | 1C |

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 26 | 1 | 01 | 61 | x→П3 | 43 | 96 | × | 12 |
| 27 | — | 11 | 62 | ПП | 53 | 97 | В/О | 52 |
| 28 | F $\sqrt{}$ | 21 | 63 | 32 | 32 | | | |
| 29 | + | 10 | 64 | : | 13 | | Регистры | |
| 30 | F ln | 18 | 65 | F $\sqrt{}$ | 21 | | | |
| 31 | В/О | 52 | 66 | F ln | 18 | | 2 а | |
| 32 | П→x 2 | 62 | 67 | П→x 3 | 63 | | 3 в | |
| 33 | ПП | 53 | 68 | 2 | 02 | | В В | |
| 34 | 37 | 37 | 69 | × | 12 | | | |

Инструкция I.7.3/54,52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результаты |
|---|---|---|---|
| 1. Переключатель Р/Г — в положение Р | | | |
| 2. Занести исходное число: | | | |
| а) если число задано в алгебраической форме a + ib | a<br>b | В↑<br>В/О С/П | a<br>a |
| б) если число задано в показательной форме $\rho e^{i\varphi}$ | ρ<br>φ | В↑<br>В/О С/П<br>БП 89 С/П | ρ<br>ρ<br>{ a—в рег. X, 2<br>{ b—в рег. Y, 3 |
| 3. Вычислить составляющие одной из функций: | | | |
| а) arcsin z | | БП 12 С/П | |
| б) arccos z | | БП 05 С/П | |
| в) arctg z | | БП 82 С/П | a—в рег. X, 2 |
| г) arsh z | | БП 45 С/П | b—в рег. Y, 3 |
| д) arch z | | БП 54 С/П | |
| е) arth z | | БП 59 С/П | |

Время вычисления — 15 — 20 с.

*Примеры.*

1. arcsin (3+i4) = 0,63398+i2, 3055;
2. arccos (3+i4) = 0,93681 — i2,3055;
3. arctg (3 + i4) = — 0,12249 + i0,15900;
4. arsh (3+i4) = 2,2999 + i0,91762;
5. arch (3 + i4) = 2,3055 + i0,93681;
6. arth (3 + i4) = 0,1175 — i0,1609.

# Глава II

# ТРИГОНОМЕТРИЯ И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

## II.1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КООРДИНАТ

### II.1.1. ПЕРЕНОС И ПОВОРОТ ДЕКАРТОВЫХ ОСЕЙ КООРДИНАТ

При переносе и повороте осей координат координаты точки P в новой системе координат запишем в виде [13]

$$x' = (x - x_0)\cos\varphi + (y - y_0)\sin\varphi;$$

$$y' = -(x - x_0)\sin\varphi + (y - y_0)\cos\varphi,$$

где x, y — координаты точки P в старой системе координат;
$x_0$, $y_0$ — координаты нового начала в старой системе координат;
$\varphi$ — угол поворота новой системы координат относительно старой ($\varphi > 0$ при повороте против часовой стрелки).

Программа II.1.1/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | ↑ | 06 | 25 | P 4 | 41 | 54 | P , | 43 |
| 01 | P cos | 83 | 30 | F 8 | 82 | 55 | ↑ | 06 |
| 02 | P 8 | 81 | 31 | × | 26 | 60 | P , | 43 |
| 03 | ←→ | 16 | 32 | P /—/ | 53 | 61 | + | 96 |
| 04 | P sin | 93 | 33 | ↑ | 06 | 62 | ↑ | 06 |
| 05 | P 7 | 71 | 34 | F 6 | 62 | 63 | F 4 | 42 |
| 10 | С/П | 78 | 35 | — | 86 | 64 | ←→ | 16 |
| 11 | P 6 | 61 | 40 | ↑ | 06 | 65 | БП | 58 |
| 12 | ←→ | 16 | 41 | F 7 | 72 | 70 | F ←→ | 15 |
| 13 | P 5 | 51 | 42 | × | 26 | | | |
| 14 | С/П | 78 | 43 | P /—/ | 53 | | Регистры | |
| 15 | P , | 43 | 44 | F 8 | 82 | | | |
| 20 | F 5 | 52 | 45 | × | 26 | | 4 оперативный | |
| 21 | — | 86 | 50 | ↑ | 06 | | 5 $x_0$ | |
| 22 | ↑ | 06 | 51 | F 4 | 42 | | 6 $y_0$ | |
| 23 | F 7 | 72 | 52 | — | 86 | | 7 sinφ | |
| 24 | × | 26 | 53 | P 4 | 41 | | 8 cosφ | |

Инструкция II.1.1/21

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Занести угол поворота φ | φ | В/О С/П | sinφ |
| 2. Занести координаты нового начала $x_0$, $y_0$ | $x_0$<br>$y_0$ | ↑<br>С/П | |
| 3. Занести координаты x, y точки P в старой системе координат | x<br>y | ↑ | |
| 4. Вычислить координаты x′, y′ точки P′ в новой системе координат | | С/П | x′ — в рег. X<br>y′ — в рег. Y |
| 5. Для вычисления координат другой точки P — к п. 3 | | | |

Время вычисления — 5 с.

Программа II.1.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П A | 4— | 13 | П→x C | 6C | 26 | П→x C | 6C |
| 01 | F · | 25 | 14 | x | 12 | 27 | × | 12 |
| 02 | x→П 9 | 49 | 15 | ←→ | 14 | 28 | + | 10 |
| 03 | ←→ | 14 | 16 | П→x 9 | 69 | 29 | БП | 51 |
| 04 | F cos | 1Г | 17 | — | 11 | 30 | 09 | 09 |
| 05 | x→П C | 4C | 18 | x→П 8 | 48 | | | |
| 06 | F Bx | 0 | 19 | П→x B | 6L | | Регистры | |
| 07 | F sin | 1C | 20 | × | 12 | | | |
| 08 | x→П B | 4L | 21 | — | 11 | 7; 8 оперативные | | |
| 09 | С/П | 50 | 22 | П→x 7 | 67 | 9 $x_0$ | | |
| 10 | П→x A | 6— | 23 | П→x B | 6L | A $y_0$ | | |
| 11 | — | 11 | 24 | × | 12 | B sin φ | | |
| 12 | x→П 7 | 47 | 25 | П→x 8 | 68 | C cos φ | | |

Инструкция II.1.1/54,52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Переключатель Р/Г поставить в положение, соответствующее форме представления угла поворота φ | | | |
| 2. Занести угол поворота φ и координаты нового начала $x_0$, $y_0$ | φ<br>$x_0$<br>$y_0$ | В ↑<br>В ↑<br>В/О С/П | |

*Продолжение*

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 3. Занести координаты точки P в старой системе координат | x<br>y | B↑ | |
| 4. Вычислить координаты x′, y′ точки P′ в новой системе координат | | С/П | x′ — в рег. X<br>y′ — в рег. Y |
| 5. Для вычисления координат другой точки — к п. 3 | | | |

Время ввода $\varphi$, $x_0$, $y_0$ — 5 с, время вычисления x′, y′ — 7 с.

*Примеры.*

1. $\varphi = 0{,}5$ рад; $x_0 = 5$, $y_0 = 6$; $x = 10$, $y = -20$.
$x' = -8{,}077$, $y' = -25{,}214$.
2. $\varphi = -30^0$; $x_0 = 3$, $y_0 = -7$; $x = -5$, $y = 10$.
$x' = -15{,}428$, $y' = 10{,}722$.

### II.1.2. ПЕРЕХОД ОТ ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТ К ПОЛЯРНЫМ

Полярные координаты точки P (радиус-вектор $\rho$ и полярный угол $\varphi$) определяются по формулам [13]:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$\varphi = (\operatorname{sign} y) \cdot \arccos \frac{x}{\rho}\ ;\ -\pi < \varphi < \pi,$$

где x и y — декартовы координаты той же точки. При этом начало декартовых координат принято за полюс, а ось абсцисс — за полярную ось.

#### II.1.2.1. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ ВЫВОД $\rho$ И $\varphi$

Вычисление и вывод результатов $\rho$ и $\varphi$ выполняются последовательно при двукратном исполнении команды С/П (при $y \neq 0$).

Программа II.1.2.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | B↑ | 0E | 08 | С/П | 50 | 16 | × | 12 |
| 01 | F $x^2$ | 22 | 09 | : | 13 | 17 | С/П | 50 |

*Продолжение*

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 02 | С/П | 50 | 10 | F $\cos^{-1}$ | 1— |
| 03 | F $x^2$ | 22 | 11 | ←→ | 14 |
| 04 | F Bx | 0 | 12 | B↑ | 0E |
| 05 | F . | 25 | 13 | F $x^2$ | 22 |
| 06 | + | 10 | 14 | F $\sqrt{}$ | 21 |
| 07 | F $\sqrt{}$ | 21 | 15 | : | 13 |

Инструкция
В/О х С/П у С/П С/П

Результат
ρ, φ

Программа II.1.2.1/52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | B↑ | 0E | 07 | + | 10 |
| 01 | F $x^2$ | 22 | 08 | F $\sqrt{}$ | 21 |
| 02 | С/П | 50 | 09 | С/П | 50 |
| 03 | F $x^2$ | 22 | 10 | : | 13 |
| 04 | F Bx | 0 | 11 | F $\cos^{-1}$ | 1— |
| 05 | К ЗН | 32 | 12 | × | 12 |
| 06 | F . | 25 | 13 | С/П | 50 |

Инструкция
В/О х С/П у С/П С/П

Результат
ρ, φ

Время вычисления — 5 с.

*Пример.* x = —2; y = 2. ρ = 2,828; φ = 2,356 рад.= 135° = = 150 град.

### II.1.2.2. ОДНОВРЕМЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ρ И φ

Программа может быть использована как подпрограмма при замене в последнем адресе команды С/П на команду В/О.

Программа II.1.2.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | ←→ | 14 | 12 | F $e^x$ | 16 |
| 01 | B↑ | 0E | 13 | : | 13 |
| 02 | F Bx | 0 | 14 | F $\cos^{-1}$ | 1— |
| 03 | F $x^2$ | 22 | 15 | ←→ | 14 |
| 04 | ←→ | 14 | 16 | F x<0 | 5C |
| 05 | F $x^2$ | 22 | 17 | 21 | 21 |
| 06 | + | 10 | 18 | F . | 25 |
| 07 | F $\sqrt{}$ | 21 | 19 | /—/ | 0L |
| 08 | B↑ | 0E | 20 | B↑ | 0E |
| 09 | F . | 25 | 21 | F . | 25 |
| 10 | Fx=0 | 5E | 22 | С/П | 50 |
| 11 | 13 | 13 | | | |

Инструкция
х В↑ у В/О С/П

Результат
φ—в рег. X
ρ—в рег.Y

Время вычисления — 5 — 8 с.

*Пример.* x = 3, y = — 2. ρ = 3,606; φ = — 0, 5880 рад.= = — 33,690° = — 37,437 град.

### II.1.3. ПЕРЕХОД ОТ ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТ К ДЕКАРТОВЫМ

Декартовы координаты точки P определяются по формулам [13]:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi; \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases}$$

где $\rho$ и $\varphi$ — полярные координаты той же точки. Начало декартовых координат принято за полюс, а ось абсцисс — за полярную ось.

#### II.1.3.1. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ ВЫВОД x И y

Вычисление и вывод результатов x и y выполняются последовательно при двукратном исполнении команды С/П.

Программа может работать как в радианах, так и в градусах (или градах) в зависимости от установки переключателя Р/Г.

Программа II.1.3.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Инструкция |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | В↑ | 0E | 05 | F . | 25 | В/О ρ С/П φ С/П С/П |
| 01 | С/П | 50 | 06 | × | 12 | |
| 02 | F cos | 1Г | 07 | С/П | 50 | Результат |
| 03 | F Bx | 0 | 08 | БП | 51 | |
| 04 | F sin | 1С | 09 | 05 | 05 | x, y |

Полное время вычисления — 7 с.

*Примеры.*

1. $\rho = 3$; $\varphi = 2$ рад. $x = -1{,}248$; $y = 2{,}728$.
2. $\rho = 1{,}5$; $\varphi = -60°$. $x = 0{,}75$; $y = -1{,}299$.

#### II.1.3.2. ОДНОВРЕМЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ x И y

Программы могут быть использованы как подпрограммы при замене в последнем адресе команды С/П на команду В/О.

Программа II.1.3.2/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Инструкция |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P 2 | 21 | 05 | P sin | 93 | ρ ↑ φ В/О С/П |
| 01 | P cos | 83 | 10 | × | 26 | Результат |
| 02 | × | 26 | 11 | ↑ | 06 | x — в рег. X |
| 03 | P , | 43 | 12 | P /—/ | 53 | y — в рег. Y |
| 04 | F 2 | 22 | 13 | С/П | 78 | Регистр 2 φ |

Время вычисления — 6 с.

Программа II.1.3.2/54, 52 может работать как в радианах, так и в градусах (или градах) в зависимости от установки переключателя Р/Г.

Программа II.1.3.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Инструкция |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | F sin | 1C | 06 | × | 12 | ρ B↑ φ B/O C/П |
| 01 | F Bx | 0 | 07 | F · | 25 | |
| 02 | F cos | 1Г | 08 | × | 12 | Результат |
| 03 | 1 | 01 | 09 | ←→ | 14 | |
| 04 | × | 12 | 10 | F · | 25 | x—в рег. X |
| 05 | F · | 25 | 11 | С/П | 50 | y—в рег. Y |

Время вычисления — 8 с.

*Примеры.*

1. $\rho = 2$; $\varphi = -1$ рад. $x = 1{,}081$; $y = -1{,}683$.

2. $\rho = 5$; $\varphi = 35°$. $x = 4{,}096$; $y = 2{,}868$.

## II.2. РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

При описании треугольников приняты следующие обозначения: a, b, c — стороны треугольника; A, B, C — соответственно противолежащие им углы; S — площадь треугольника.

По заданным трем сторонам, по двум сторонам и углу и по стороне и двум углам определяются остальные стороны и углы, а также площадь треугольника [13].

В соответствии с положением переключателя Р/Г расчет углов ведется в радианах, градусах или градах.

### II.2.1. ПО ТРЕМ СТОРОНАМ

Дано: a, b, c.

A, B, C, S вычисляются по формулам:

$$A = \arccos \frac{-a^2+b^2+c^2}{2bc}; \quad B = \arccos \frac{a^2-b^2+c^2}{2ac};$$

$$C = \pi - (A + B); \quad S = \frac{1}{2} a \cdot b \sin C.$$

Программа II.2.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 3 | 43 | 23 | ПП | 53 |
| 01 | F $x^2$ | 22 | 24 | 40 | 40 |
| 02 | x→П C | 4C | 25 | x→П B | 4L |
| 03 | ←→ | 14 | 26 | + | 10 |
| 04 | x→П 2 | 42 | 27 | F cos | 1Г |
| 05 | F $x^2$ | 22 | 28 | /—/ | 0L |
| 06 | x→П B | 4L | 29 | F $\cos^{-1}$ | 1— |
| 07 | + | 10 | 30 | x→П C | 4C |
| 08 | ←→ | 14 | 31 | F sin | 1C |
| 09 | x→ П 1 | 41 | 32 | П→x 1 | 61 |
| 10 | F $x^2$ | 22 | 33 | × | 12 |
| 11 | x→П Д | 4Г | 34 | П→x 2 | 62 |
| 12 | — | 11 | 35 | × | 12 |
| 13 | П→x 2 | 62 | 36 | 2 | 02 |
| 14 | ПП | 53 | 37 | : | 13 |
| 15 | 40 | 40 | 38 | x→П Д | 4Г |
| 16 | x→П A | 4— | 39 | C/П | 50 |
| 17 | П→x Д | 6Г | 40 | : | 13 |
| 18 | П→x C | 6C | 41 | П→x 3 | 63 |
| 19 | + | 10 | 42 | : | 13 |
| 20 | П→x B | 6L | 43 | 2 | 02 |
| 21 | — | 11 | 44 | : | 13 |
| 22 | П→x 1 | 61 | 45 | F $\cos^{-1}$ | 1— |

| Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|
| 46 | В/О | 52 |

Инструкция

В/О а В↑ в В↑ с С/П

Результат

S — в рег. X, Д
A — в рег. A
B — в рег. B
C — в рег. C

Регистры

| | |
|---|---|
| 1 | a |
| 2 | в |
| 3 | c |
| A | A |
| B | B |
| C | C |
| Д | S |

Время вычисления — 23 с.

*Пример.* a = 4, b = 5, c = 6.

Ответ: A = 0,7227 рад = 41, 41°; B = 0,9734 рад = 55,77°; C = 1,4455 рад = 82,82°; $S = 9{,}92$.

### II.2.2. ПО ДВУМ СТОРОНАМ И УГЛУ МЕЖДУ НИМИ

Дано: a, b, C.

c, A, B, S вычисляются по формулам:

$$c = (a^2 + b^2 - 2ab\cos C)^{\frac{1}{2}};\quad A = \arccos\frac{-a^2+b^2+c^2}{2b\cdot c};$$

$$B = \pi - (B + C);\quad S = \frac{1}{2}a\cdot c\sin B.$$

Программа II.2.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П C | 4C | 23 | П→xA | 6— |
| 01 | F· | 25 | 24 | — | 11 |
| 02 | x→П2 | 42 | 25 | П→x3 | 63 |
| 03 | Fx² | 22 | 26 | : | 13 |
| 04 | x→ПВ | 4L | 27 | + | 10 |
| 05 | ←→ | 14 | 28 | П→xД | 6Г |
| 06 | x→П 1 | 41 | 29 | : | 13 |
| 07 | F x² | 22 | 30 | F cos⁻¹ | 1— |
| 08 | x→П A | 4— | 31 | x→П A | 4— |
| 09 | + | 10 | 32 | П→x C | 6C |
| 10 | П→x C | 6C | 33 | + | 10 |
| 11 | F cos | 1Г | 34 | F cos | 1Г |
| 12 | П→x 1 | 61 | 35 | /—/ | 0L |
| 13 | × | 12 | 36 | F cos⁻¹ | 1— |
| 14 | П→x 2 | 62 | 37 | x→П B | 4L |
| 15 | 2 | 02 | 38 | F sin | 1C |
| 16 | × | 12 | 39 | П→x 3 | 63 |
| 17 | x→П Д | 4Г | 40 | × | 12 |
| 18 | × | 12 | 41 | П→x 1 | 61 |
| 19 | — | 11 | 42 | × | 12 |
| 20 | F √ | 21 | 43 | 2 | 02 |
| 21 | x→П 3 | 43 | 44 | : | 13 |
| 22 | П→x B | 6L | 45 | x→П Д | 4Г |

| Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|
| 46 | С/П | 50 |

Инструкция

а В↑ в В↑ С В/О С/П

Результат

S — в рег. X, Д
c — в рег. 3
A — в рег. A
B — в рег. B

Регистры

| | |
|---|---|
| 1 | a |
| 2 | в |
| 3 | c |
| A | A |
| B | B |
| C | C |
| Д | S |

Время вычисления — 22 с.

*Пример.* a = 3, b = 2, C = 1 рад. = 57,3°.

Ответ: c = 2,553; A = 1,422 рад = 81, 46°; B = 0,72 рад = = 41,24°; S = 2,524.

### II.2.3. ПО ДВУМ СТОРОНАМ И УГЛУ ПРОТИВ ОДНОЙ ИЗ НИХ

Дано: b, c, B.

a, A, C, S вычисляются по формулам:

$$C = \arcsin \frac{c \sin B}{b}; \quad A = \pi - B - C; \quad a = \frac{b \sin A}{\sin B};$$

$$S = \frac{1}{2} a \cdot c \sin B.$$

При в $<$ с имеется и второе решение:

$$C' = \pi - C; \quad A' = \pi - B - C'; \quad a' = \frac{b \sin A'}{\sin B}.$$

Программа II.2.3/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П B | 4L | 15 | x→П 0 | 40 | 30 | 2 | 02 |
| 01 | F sin | 1C | 16 | П→x B | 6L | 31 | : | 13 |
| 02 | ←→ | 14 | 17 | — | 11 | 32 | x→П Д | 4Г |
| 03 | x→П 3 | 43 | 18 | x→П A | 4— | 33 | С/П | 50 |
| 04 | × | 12 | 19 | F sin | 1C | | | |
| 05 | ←→ | 14 | 20 | П→x 2 | 62 | | Регистры | |
| 06 | x→П 2 | 42 | 21 | × | 12 | | | |
| 07 | : | 13 | 22 | B↑ | 0E | 0 | оперативный | |
| 08 | F $\sin^{-1}$ | 19 | 23 | П→x B | 6L | | 1 a; a′ | |
| 09 | x→П C | 4C | 24 | F sin | 1C | | 2, в; в′ | |
| 10 | 1 | 01 | 25 | : | 13 | | 3, c; c′ | |
| 11 | /—/ | 0L | 26 | x→П 1 | 41 | | A A; A′ | |
| 12 | F $\cos^{-1}$ | 1— | 27 | ←→ | 14 | | B B; B′ | |
| 13 | ←→ | 14 | 28 | П→x 3 | 63 | | C C; C′ | |
| 14 | — | 11 | 29 | × | 12 | | Д S; S′ | |

Инструкция II.2.3/54,52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Переключатель Р/Г поставить в положение, соответствующее форме представления углов | | | |
| 2. Ввести b, c, B | в<br>c<br>B | B↑<br>B↑ | в<br>c<br>B |
| 3. Вычислить a, A, C, S | | B/O C/П | a—в рег. 1<br>A—в рег. A<br>C—в рег. C<br>S—в рег. X, Д |
| 4. Если b<c, вычислить a′, A′, C′, S′ | | П→x 0 БП 09 C/П | a′—в рег. 1<br>A′—в рег. A<br>C′—в рег. C<br>S′—в рег.X, Д |

Время вычисления — 15 с.
*Пример*. в = 2, c = 3; B = 0,5 рад = 28,65°.
Ответ:

1) a = 4,022;
A = 1,839 рад = 105,37°;
C = 0,803 рад = 45,987°;
S = 2,893.

2) a′ = 1,243;
A′ = 0,303 рад = 17,337°;
C′ = 2,339 рад = 134,013°;
S = 0,894.

### II.2.4. ПО ДВУМ УГЛАМ И СТОРОНЕ МЕЖДУ НИМИ

Дано: a, B, C.
b, c, A, S вычисляются по формулам:

$$A = \pi - B - C;\ b = a\frac{\sin B}{\sin A};\ C = a\frac{\sin C}{\sin A};$$

$$S = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin B.$$

Программа II.2.4/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П C | 4C | 18 | × | 12 |
| 01 | ←→ | 14 | 19 | x→П 2 | 42 |
| 02 | x→П B | 4L | 20 | ←→ | 14 |
| 03 | + | 10 | 21 | П→x C | 6C |
| 04 | F cos | 1Г | 22 | F sin | 1C |
| 05 | /—/ | 0L | 23 | × | 12 |
| 06 | F $\cos^{-1}$ | 1— | 24 | x→П 3 | 43 |
| 07 | x→П A | 4— | 25 | × | 12 |
| 08 | ←→ | 14 | 26 | × | 12 |
| 09 | x→П 1 | 41 | 27 | 2 | 02 |
| 10 | ←→ | 14 | 28 | : | 13 |
| 11 | F sin | 1C | 29 | x→П Д | 4Г |
| 12 | : | 13 | 30 | С/П | 50 |
| 13 | F Bx | 0 | | | |
| 14 | ←→ | 14 | | Инструкция | |
| 15 | B↑ | 0E | | | |
| 16 | П→x B | 6L | | | |
| 17 | F sin | 1C | a B↑ B B↑ C В/О С/П | | |

Результат

S — в рег. X, Д
A — в рег. A
в — в рег. 2
c — в рег. 3

Регистры

| | |
|---|---|
| 1 | a |
| 2 | в |
| 3 | c |
| A | A |
| B | B |
| C | C |
| Д | S |

Время вычисления — 16 с.
*Пример.* a = 2; B = 0,8 рад = 45,837°; C = 1 рад = 57,3°.
Ответ: b = 1,473; c = 1,728; A = 1,342 рад = 76, 863°; S = = 1,24.

### II.2.5. ПО ДВУМ УГЛАМ И СТОРОНЕ ПРОТИВ ОДНОГО ИЗ НИХ

Дано: a, A, C.
b, c, B, S вычисляются по формулам:

$$B = \pi - A - C;\ b = a\frac{\sin B}{\sin A};\ c = a\frac{\sin C}{\sin A};$$

$$S = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin A.$$

Программа II.2.5/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П C | 4C | 18 | × | 12 |
| 01 | ←→ | 14 | 19 | x→П 2 | 42 |
| 02 | x→П A | 4— | 20 | F Bx | 0 |
| 03 | + | 10 | 21 | П→x C | 6C |
| 04 | F cos | 1Г | 22 | F sin | 1C |
| 05 | /—/ | 0L | 23 | × | 12 |
| 06 | F $\cos^{-1}$ | 1— | 24 | x→П 3 | 43 |
| 07 | x→П B | 4L | 25 | × | 12 |
| 08 | F sin | 1C | 26 | × | 12 |
| 09 | ←→ | 14 | 27 | 2 | 02 |
| 10 | x→П 1 | 41 | 28 | : | 13 |
| 11 | ←→ | 14 | 29 | x→П Д | 4Г |
| 12 | П→x A | 6— | 30 | С/П | 50 |
| 13 | F sin | 1C | | | |
| 14 | ←→ | 14 | | Инструкция | |
| 15 | П→x 1 | 61 | | | |
| 16 | F Bx | 0 | | | |
| 17 | : | 13 | a B↑ A B↑ C B/O C/П | | |

Результат

S — в рег. X, Д
в — в рег. 2
с — в рег. 3
B — в рег. B

Регистры

| | |
|---|---|
| 1 | a |
| 2 | в |
| 3 | с |
| A | A |
| B | B |
| C | C |
| Д | S |

Время вычисления — 16 с.
*Пример.* a = 3; A = 1 рад = 57,3°; C = 1,5 рад = 85,944°.
Ответ: *b* = 2,13; c = 3,556; B = 0,642 рад = 36,76°; S = 3,192.

## II.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ РАССТОЯНИЙ

Приведены программы вычисления обобщенных расстояний в n-мерном пространстве ($1 \leqslant n$), от точки до n-мерной плоскости и между парой (n — 1)-мерных плоскостей.

### II.3.1. ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ

Расстояние от точки с координатами $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ до (n — 1)-мерной плоскости, заданной уравнением $\sum_{i=1}^{n} A_i x_i + B = 0$, вычисляется по формуле

$$d = \frac{\left| \sum_{i=1}^{n} A_i x_i^0 + B \right|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} A_i^2}}.$$

Программа II.3.1/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P 2 | 21 | 15 | F $x^2$ | 55 | 34 | F $x^2$ | 55 |
| 01 | Cx | 76 | 20 | ↑ | 06 | 35 | ↑ | 06 |
| 02 | P 3 | 31 | 21 | F 4 | 42 | 40 | F 4 | 42 |
| 03 | P 4 | 41 | 22 | + | 96 | 41 | : | 36 |
| 04 | F 2 | 22 | 23 | P 4 | 41 | 42 | F $\sqrt{}$ | 65 |
| 05 | × | 26 | 24 | C/П | 78 | 43 | C/П | 78 |
| 10 | ↑ | 06 | 25 | P 2 | 21 | | | |
| 11 | F 3 | 32 | 30 | БП | 58 | | Регистры | |
| 12 | + | 96 | 31 | ↑ | 06 | | | |
| 13 | P 3 | 31 | 32 | F 3 | 32 | | 2—4 оперативные | |
| 14 | F 2 | 22 | 33 | + | 96 | | | |

Программа II.3.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | К НОП | 54 | 09 | П→x 0 | 60 | 18 | F $x^2$ | 22 |
| 01 | 0 | 00 | 10 | + | 10 | 19 | П→ x 0 | 60 |
| 02 | B↑ | 0E | 11 | x→П 0 | 40 | 20 | : | 13 |
| 03 | x→П 0 | 40 | 12 | F · | 25 | 21 | F $\sqrt{}$ | 21 |
| 04 | F · | 25 | 13 | + | 10 | 22 | C/П | 50 |
| 05 | F · | 25 | 14 | C/П | 50 | | | |
| 06 | × | 12 | 15 | БП | 51 | | Регистр | |
| 07 | F Bx | 0 | 16 | 06 | 06 | | | |
| 08 | F $x^2$ | 22 | 17 | + | 10 | | 0 оперативный | |

Для обеих программ используется единая инструкция.

Инструкция II.3.1/21,54,52

| Содержание | Ввести число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Перейти к началу программы | | В/О | |
| 2. Ввести пару чисел $x_i^0$, $A_1$ | $x_i^0$ | В↑ | |
| | Ai | С/П | |
| 3. Если данные исчерпаны, далее, если нет — к п. 2 | | | |
| 4. Ввести B и вычислить d: | | | |
| а) для программы II.3.1/21 | B | БП F 3 С/П | d в рег. X |
| б) для программы II.3.1/54, 52 | B | БП 17 С/П | d в рег. X |

Время вычисления после ввода одной пары $x_i^0$, $A_1$ — 3 с. Время вычисления после ввода B — 3 с.

*Примеры.*

1. Вычислить расстояние на плоскости от точки с координатами: $x_1^0 = 1$, $x_2^0 = 2$ до прямой, заданной уравнением $5x_1 - 3x_2 + 4 = 0$.

Ответ: $d = 0{,}5145$.

2. Вычислить расстояние в трехмерном пространстве от точки с координатами: $x_1^0 = 1$, $x_2^0 = 2$, $x_3^0 = 3$ до плоскости $2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 5 = 0$.

Ответ: $d = 1{,}671$.

## II.3.2. РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПЛОСКОСТЯМИ

Расстояние между парой (n — 1)-мерных параллельных плоскостей, заданных в виде $\sum_{i=1}^{n} A_i x_i + B_{1;2} = 0$, вычисляется по формуле [13]

$$d = \frac{|B_1 - B_2|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} A_i^2}}.$$

Программа II.3.2/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | F $x^2$ | 55 | 11 | P ↑ | 03 | 22 | С/П | 78 |
| 01 | 0 | 04 | 12 | — | 86 | | Регистр | |
| 02 | + | 96 | 13 | F $x^2$ | 55 | | 2 оперативный | |
| 03 | P 2 | 21 | 14 | ↑ | 06 | | | |
| 04 | С/П | 78 | 15 | F 2 | 22 | | | |
| 05 | F $x^2$ | 55 | 20 | : | 36 | | | |
| 10 | БП | 58 | 21 | F $\sqrt{}$ | 65 | | | |

Программа II.3.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | F $x^2$ | 22 | 05 | БП | 51 | 10 | : | 13 |
| 01 | 0 | 00 | 06 | 02 | 02 | 11 | F $\sqrt{}$ | 21 |
| 02 | + | 10 | 07 | — | 11 | 12 | С/П | 50 |
| 03 | С/П | 50 | 08 | F $x^2$ | 22 | | | |
| 04 | F $x^2$ | 22 | 09 | ←→ | 14 | | | |

Для обеих программ используется единая инструкция.

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Перейти к началу программы | | В/О | |
| 2. Ввести очередное значение $A_1$ | Ai | С/П | |
| 3. Если данные исчерпаны, далее, если нет — к п. 2 | | | |
| 4. Ввести $B_1$, $B_2$ | $B_1$<br>$B_2$ | В↑ | |
| 5. Вычислить d:<br>а) для программы II.3.2/21<br>б) для программы II.3.2/54, 52 | | БП Р ⟷ С/П<br>БП 07 С/П | } d — в рег. X |

Время вычисления после ввода $A_1$ — 2 с; после ввода $B_1$, $B_2$ — 2с.

*Примеры.*

1. Вычислить расстояние на плоскости между двумя параллельными прямыми: $x_1 - 2x_2 + 3 = 0$ и $x_1 - 2x_2 + 8 = 0$.

Ответ: $d = 2{,}236$.

2. Вычислить в трехмерном пространстве расстояние между двумя параллельными плоскостями: $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5 = 0$ и $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5 = 0$.

Ответ: $d = 1{,}857$.

## II.4. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Периодическая с периодом $2\pi$ функция f (t) может быть представлена на интервале ($-\pi < t < \pi$) рядом Фурье [16]

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin (kt + \varphi_k).$$

При n равномерных разбиениях интервала ($-\pi < t < \pi$) коэффициенты $a_к$ и $b_к$ определяются приближенно из соотношений:

$$a_k = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} f(z_i) \cos kz_i,\ b_k = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} f(z_i) \sin kz_i,$$

где $z_i = \frac{\pi}{n}(2i - n - 1)$, а $c_k$ и $\varphi_k$ связаны с $a_k$ и $b_k$

$$c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2};\ \varphi_k = \operatorname{arctg} \frac{a_k}{b_k}.$$

## II.4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРВЫХ ЧЕТЫРЕХ ГАРМОНИК ФУНКЦИИ f(t)

По приведенной программе определяются $a_0$ — $a_4$ и $b_1$ — $b_4$. Количество разбиений оси t вводится вручную.

Подпрограмма вычисления значения аналитической функции f (t) размещается в ячейках памяти непосредственно за основной программой и заканчивается командой В/О. Аргумент t для вычисления f(t) выбирается из регистра X. Вычисленное значение f (t) также помещается в регистр X. Переключатель Р/Г установить в положение Р.

Программа II.4.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 2 | 42 | 28 | П→x 0 | 60 | 56 | К x→П 4 | L4 |
| 01 | 2 | 02 | 29 | : | 13 | 57 | F . | 25 |
| 02 | : | 13 | 30 | В↑ | 0E | 58 | П→x 3 | 63 |
| 03 | x→П 0 | 40 | 31 | ПП | 53 | 59 | В/О | 52 |
| 04 | 9 | 09 | 32 | 49 | 49 | | | |
| 05 | x→П 1 | 41 | 33 | П→x 1 | 61 | | Инструкция | |
| 06 | 4 | 04 | 34 | × | 12 | | | |
| 07 | x→П 4 | 44 | 35 | F cos | 1Г | | Р/Г — в Р | |
| 08 | 0 | 00 | 36 | ПП | 53 | | п В/О С/П | |
| 09 | К x→П 4 | L4 | 37 | 48 | 48 | | | |
| 10 | F L 1 | 5L | 38 | П→x 1 | 61 | | Результат | |
| 11 | 09 | 09 | 39 | × | 12 | | | |
| 12 | 4 | 04 | 40 | F sin | 1C | | $a_0$ — в рег. 5 | |
| 13 | x→П 1 | 41 | 41 | ПП | 53 | | $a_1$ — в рег. С | |
| 14 | x→П 4 | 44 | 42 | 48 | 48 | | $a_2$ — в рег. А | |
| 15 | П→x 2 | 62 | 43 | F L1 | 5L | | $a_3$ — в рег. 8 | |
| 16 | 2 | 02 | 44 | 33 | 33 | | $a_4$ — в рег. 6 | |
| 17 | F 1/x | 23 | 45 | F L2 | 58 | | $b_1$ — в рег. Д | |
| 18 | — | 11 | 46 | 12 | 12 | | $b_2$ — в рег. В | |
| 19 | П→x 0 | 60 | 47 | С/П | 50 | | $b_3$ — в рег. 9 | |
| 20 | : | 13 | 48 | × | 12 | | $b_4$ — в рег. 7 | |
| 21 | 1 | 01 | 49 | К П→x 4 | Г4 | | | |
| 22 | — | 11 | 50 | + | 10 | | Регистры | |
| 23 | F π | 20 | 51 | П→x 4 | 64 | | | |
| 24 | × | 12 | 52 | 1 | 01 | | 0 п/2 | |
| 25 | x→П 3 | 43 | 53 | — | 11 | | 1—4 оперативные | |
| 26 | ПП | 53 | 54 | x→П 4 | 44 | | 5—Д $a_к$, $b_к$ | |
| 27 | 60 | 60 | 55 | F . | 25 | | | |

Время вычисления — $T = (1{,}3 + T_f)\cdot n$ мин, где $T_f$ — время вычисления одного значения функции f (t).

*Пример.* $n = 10$, $f(t) = \cos \frac{t}{2}$.

При этом подпрограмма вычисления функции f (t) содержит команды 2 : F cos В/О

Ответ дан в виде таблицы:

| | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Вычисленное значение | 1,278 | 0,419 | —0,0788 | 0,0292 | —0,011 | $-3{,}7\cdot10^{-9}$ | $3\cdot10^{-9}$ | $-3\cdot10^{-9}$ | $-1\cdot10^{-9}$ |
| Точное значение | 1,273 | 0,424 | —0,085 | 0,0364 | —0,020 | 0 | 0 | 0 | 0 |

### II.4.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ m-Й ГАРМОНИКИ

По приведенным программам определяется m-я гармоника — $a_m$, $b_m$ разложения функции f (t) в ряд Фурье. Количество n разбиений интервала ($-\pi < t < \pi$) вводится вручную.

Подпрограмма вычисления f (t) размещается в ячейках памяти непосредственно после основной программы. Аргумент t и вычисленное значение f (t) помещаются в регистр X. Переключатель Р/Г установлен в положение Р.

Программа II.4.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 1 | 41 | 23 | 2 | 02 | 46 | + | 10 |
| 01 | 0 | 00 | 24 | × | 12 | 47 | F √ | 21 |
| 02 | x→П A | 4— | 25 | B↑ | 0E | 48 | x→П C | 4C |
| 03 | x→П B | 4L | 26 | П→x 3 | 63 | 49 | С/П | 50 |
| 04 | F π | 20 | 27 | П→x 1 | 61 | | | |
| 05 | П→x 0 | 60 | 28 | × | 12 | | Инструкция | |
| 06 | x→П 2 | 42 | 29 | x→П C | 4C | | | |
| 07 | : | 13 | 30 | F cos | 1Г | | Р/Г—в Р | |
| 08 | B↑ | 0E | 31 | × | 12 | | n x→П 0 m B/O С/П | |
| 09 | + | 10 | 32 | П→x A | 6— | | | |
| 10 | x→П 4 | 44 | 33 | + | 10 | | Результат | |
| 11 | F Bx | 0 | 34 | x→П A | 4— | | | |
| 12 | F π | 20 | 35 | F $x^2$ | 22 | | с—в рег. X, C | |
| 13 | + | 10 | 36 | ←→ | 14 | | a—в рег. A | |
| 14 | x→П 3 | 43 | 37 | П→x C | 6C | | в—в рег. B | |
| 15 | П→x 3 | 63 | 38 | F sin | 1C | | | |
| 16 | П→x 4 | 64 | 39 | × | 12 | | Регистры | |
| 17 | — | 11 | 40 | П→x B | 6L | | 0 n | |
| 18 | x→П 3 | 43 | 41 | + | 10 | | 1 m | |
| 19 | ПП | 53 | 42 | x→П B | 4L | | 2—4 оперативные | |
| 20 | 50 | 50 | 43 | F L 2 | 58 | | A a | |
| 21 | П→x 0 | 60 | 44 | 15 | 15 | | B в | |
| 22 | : | 13 | 45 | F $x^2$ | 22 | | C c | |

*Пример.* Определить составляющие третьей гармоники функции $f(t) = \sin\frac{t}{4}$ при 20 разбиениях оси t.

Решение. $n = 20$, $m = 3$. Подпрограмма вычисления f (t) имеет вид 4 : F sin B/O

Ответ: $\tilde{a}_3 \approx 0$; $\tilde{b}_3 = 0{,}1568$; $\tilde{c}_3 = 0{,}1568$; точные значения $a_3 = 0$; $b_3 = 0{,}1511$; $c_3 = 0{,}1511$.

Время вычисления примера — 4 мин.

### II.4.3. СИНТЕЗ ФУНКЦИИ В ОДНОЙ ТОЧКЕ

По программе вычисляется значение функции f (t) в фиксированной точке t при задании произвольного числа гармоник разложения функции f (t) в ряд Фурье.

Функция f (t) представляется в точке t как

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_k (a_k \cdot \cos kt + b_k \sin kt).$$

(При $k = 0$ следует установить $b_0 = 2$).

Программа II.4.3/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P 5 | 51 | 30 | P sin | 93 | 60 | P5 | 51 |
| 01 | 0 | 04 | 31 | ↑ | 06 | 61 | БП | 58 |
| 02 | P 7 | 71 | 32 | F 3 | 32 | 62 | 0 | 04 |
| 03 | С/П | 78 | 33 | × | 26 | | | |
| 04 | P 3 | 31 | 34 | ↑ | 06 | | | |
| 05 | С/П | 78 | 35 | F 7 | 72 | | | |
| 10 | P4 | 41 | 40 | + | 96 | Регистры | | |
| 11 | P x=0 | 59 | 41 | P 7 | 71 | 2 t | | |
| 12 | P× | 23 | 42 | F5 | 52 | 3—6 оперативные | | |
| 13 | F 5 | 52 | 43 | ↑ | 06 | 7 f(t) | | |
| 14 | 2 | 24 | 44 | F 6 | 62 | | | |
| 15 | : | 36 | 45 | P cos | 83 | | | |
| 20 | БП | 58 | 50 | × | 26 | | | |
| 21 | F 5 | 52 | 51 | ↑ | 06 | | | |
| 22 | ↑ | 06 | 52 | F 7 | 72 | | | |
| 23 | F 2 | 22 | 53 | + | 96 | | | |
| 24 | × | 26 | 54 | P 7 | 71 | | | |
| 25 | P 6 | 61 | 55 | С/П | 78 | | | |

Программа II.4.3/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | КНОП | 54 | 11 | × | 12 | 22 | x→П 7 | 47 |
| 01 | 0 | 00 | 12 | x→П1 | 41 | 23 | С/П | 50 |
| 02 | x→П 7 | 47 | 13 | F sin | 1С | 24 | БП | 51 |
| 03 | + | 10 | 14 | × | 12 | 25 | 04 | 04 |
| 04 | Fx=0 | 5Е | 15 | ←→ | 14 | | | |
| 05 | 10 | 10 | 16 | П→x1 | 61 | | Регистры | |
| 06 | + | 10 | 17 | F cos | 1Г | 1 | к | |
| 07 | : | 13 | 18 | × | 12 | 2 | t | |
| 08 | БП | 51 | 19 | + | 10 | 7 | f(t) | |
| 09 | 20 | 20 | 20 | П→x 7 | 67 | | | |
| 10 | П→x2 | 62 | 21 | + | 10 | | | |

Для обеих программ используется общая инструкция.

Инструкция II.4.3/21,54,52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Переключатель Р/Г поставить в положение Р | | | |
| 2. Занести t в регистр памяти 2 | t | x→П2 | |
| 3. Перейти к началу программы | | В/О | |
| 4. Занести $a_к$, $b_к$, ($b_0=2$): | | | |
| а) для программы II.4.3/21 | $a_к$ | С/П | 0 |
| | $в_к$ | С/П | $b_к$ |
| б) для программы II.4.3/54, 52 | $a_к$ | В↑ | $a_к$ |
| | $в_к$ | В↑ | $в_к$ |
| 5. Занести k и вычислить f (t) | к | С/П | f(t)—в рег. X,7 |
| 6. Для продолжения вычисления f (t) — к п. 4 | | | |

Время вычисления для одной гармоники — 5 с.

*Пример.* Определить значение $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ при следующих значениях гармоник: $a_0 = 4$, $a_2 = 5$, $в_2 = 3$, $a_5 = 6$, $в_5 = -2$.

Решение. После ввода $\pi/4$ в регистр памяти 2 ввести значения $a_к$, $в_к$, k согласно п. 4.5 инструкции ($в_0 = 2$).

Результат представлен в виде следующей таблицы:

| k | 0 | 2 | 5 |
|---|---|---|---|
| f (t) | 2 | 5 | 2,1716 |

## II.4.4. СИНТЕЗ ФУНКЦИИ f(t) ПО ШЕСТИ ГАРМОНИКАМ

Определяется функция f (t) при задании нулевой и первых шести гармоник ($a_0 — a_6$; $в_2 — в_6$). Гармоники заносятся в регистры памяти один раз, после чего вычисляется значение f (t) в произвольном числе точек t.

Программа II.4.4/52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→ПЕ | 4E | 15 | К П→x 0 | Г0 |
| 01 | П→xД | 6Г | 16 | × | 12 |
| 02 | 2 | 02 | 17 | ←→ | 14 |
| 03 | : | 13 | 18 | F sin | 1C |
| 04 | 6 | 06 | 19 | КП→x0 | Г0 |
| 05 | x→П 0 | 40 | 20 | × | 12 |
| 06 | П→x E | 6E | 21 | + | 10 |
| 07 | × | 12 | 22 | + | 10 |
| 08 | П→x0 | 60 | 23 | П→x0 | 60 |
| 09 | 7 | 07 | 24 | 6 | 06 |
| 10 | + | 10 | 25 | — | 11 |
| 11 | x→П0 | 40 | 26 | Fx=0 | 5E |
| 12 | F. | 25 | 27 | 05 | 05 |
| 13 | B↑ | 0E | 28 | ←→ | 14 |
| 14 | F cos | 1Г | 29 | С/П | 50 |

| Регистры | |
|---|---|
| 0; E | оперативные |
| 1 | $a_1$ |
| 2 | $в_1$ |
| 3 | $a_2$ |
| 4 | $в_2$ |
| 5 | $a_3$ |
| 6 | $в_3$ |
| 7 | $a_4$ |
| 8 | $в_4$ |
| 9 | $в_5$ |
| A | $a_5$ |
| B | $в_6$ |
| C | $a_6$ |
| Д | $a_0$ |

Инструкция II.4.4/52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Переключатель Р/Г поставить в положение Р | | | |
| 2. Занести значения гармоник $a_0 — a_6$, $b_1 — b_6$ в регистры памяти | $a_0—a_6$ | x→П (Д,1,3,5,7, A,C) | |
| | $в_1—в_6$ | x→П (2,4,6,8,9,B) | |
| 3. Занести t и вычислить f (t) | t | В/О С/П | f(t) |
| 4. Для вычисления f (t) при другом значении t — к п. 3 | | | |

Время вычисления — 1 мин.

*Пример.* Вычислить f (1) при задании следующих значений гармоник: $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = в_1 = в_2 = в_3 = в_4 = в_5 = в_6 = 1$.

Решение. Занести значения a, в в соответствующие регистры памяти и выполнить команды 1 В/О С/П.

В результате получаем f (1) = 0,121.

## II.5. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ И ОБРАТНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

### II.5.1. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Расчетные формулы [13]:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}.$$

Программа II.5.1/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | $Pe^x$ | 33 | 13 | F2 | 22 |
| 01 | ↑ | 06 | 14 | + | 96 |
| 02 | F1/x | 45 | 15 | P4 | 41 |
| 03 | P2 | 21 | 20 | : | 36 |
| 04 | — | 86 | 21 | P5 | 51 |
| 05 | 2 | 24 | 22 | С/П | 78 |
| 10 | : | 36 | | | |
| 11 | P3 | 31 | | Инструкция | |
| 12 | ↑ | 06 | x | В/О С/П | |

Результат

sh x—в рег. 3
ch x—в рег. 4
th x—в рег. X, 5

Регистры

2 оперативный
3 sh x
4 ch x
5 th x

Время вычисления — 4 с.

При вычислении по программе II.5.1/54,52 вычисленные значения функций shx, chx и thx помещаются программой в регистры, номера которых расположены соответственно под надписями sin, cos, tg. Это облегчает чтение результатов.

Программа II.5.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | $Fe^x$ | 16 | 08 | — | 11 |
| 01 | B ↑ | 0E | 09 | x→П 7 | 47 |
| 02 | B ↑ | 0E | 10 | FBx | 0 |
| 03 | F1/x | 23 | 11 | : | 13 |
| 04 | + | 10 | 12 | x→П 9 | 49 |
| 05 | 2 | 02 | 13 | С/П | 50 |
| 06 | : | 13 | | Инструкция | |
| 07 | x→П 8 | 48 | | x В/О С/П | |

Результат

sh x—в рег. 7
ch x—в рег. 8
th x—в рег. X, 9

Регистры

7 sh x
8 ch x
9 th x

Время вычисления — 6 с.

*Примеры.*

1. x = 1. shx = 1,1752; chx = 1,5431; thx = 0,7616.
2. x = — 2. shx = — 3,6269; chx = 3,7622; thx = — 0,9640.

### II.5.2. ОБРАТНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Расчетные формулы [13]:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{arsh} x &= \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \\ \operatorname{arch} x &= \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \end{aligned}\right\} x > 1,$$

$$\operatorname{arth} x = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad |x| < 1.$$

По программам вычисляются arshx, archx и arth (1/x).

Программа II.5.2/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Инструкция |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P6 | 61 | 23 | ↑ | 06 | |
| 01 | Fx² | 55 | 24 | F6 | 62 | x В/О С/П |
| 02 | 1 | 14 | 25 | + | 96 | |
| 03 | + | 96 | 30 | P ln | 13 | Результат |
| 04 | F √‾ | 65 | 31 | P5 | 51 | |
| 05 | ↑ | 06 | 32 | F6 | 62 | arsh x—в рег. 4 |
| 10 | F6 | 62 | 33 | 1 | 14 | arch x—в рег. 5 |
| 11 | + | 96 | 34 | + | 96 | arth 1/x—в рег. X,6 |
| 12 | P ln | 13 | 35 | 2 | 24 | |
| 13 | P4 | 41 | 40 | — | 86 | Регистры |
| 14 | F6 | 62 | 41 | : | 36 | |
| 15 | Fx² | 55 | 42 | F √ | 65 | 4 arsh x |
| 20 | 1 | 14 | 43 | P ln | 13 | 5 arch x |
| 21 | — | 86 | 44 | P6 | 61 | 6 arth 1/x |
| 22 | F√ | 65 | 45 | С/П | 78 | |

Время вычисления — 10 с.

При вычислении по программе II.5.2/54, 52 для удобства вывода результатов вычислений значения функций arshx, archx и arth (1/x) помещаются в регистры, номера которых расположены соответственно под надписями $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ и $\mathrm{tg}^{-1}$.

Программа II.5.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Инструкция |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | B ↑ | 0E | 14 | + | 10 | |
| 01 | B ↑ | 0E | 15 | F ln | 18 | x В/О С/П |
| 02 | Fx² | 22 | 16 | x→П5 | 45 | |
| 03 | 1 | 01 | 17 | F. | 25 | Результат |
| 04 | + | 10 | 18 | 1 | 01 | |
| 05 | F√ | 21 | 19 | + | 10 | arsh x—в рег. 4 |
| 06 | + | 10 | 20 | ←→ | 14 | arch x—в рег. 5 |
| 07 | F ln | 18 | 21 | 1 | 01 | arth 1/x—в рег. X,6 |
| 08 | x→П 4 | 44 | 22 | — | 11 | |
| 09 | F. | 25 | 23 | : | 13 | Регистры |
| 10 | Fx² | 22 | 24 | F√ | 21 | |
| 11 | 1 | 01 | 25 | F ln | 18 | 4 arsh x |
| 12 | — | 11 | 26 | x→П6 | 46 | 5 arch x |
| 13 | F√ | 21 | 27 | С/П | 50 | 6 arth 1/x |

Время вычисления — 12 с.

*Пример.* x = 3. arsh (3) = 1,818; arch (3) = 1,763; arth (1/3)= = 0,347.

# Глава III
# ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

## III.1. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

### III.1.1. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИЕЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Интерполирующая функция f ($x$) аппроксимирует истинную функцию y = y (x), совпадая с ней в n узлах f ($x_i$) = y ($x_i$), i = 1, 2, ..., n.

Приведены программы вычисления функции f (x) в произвольной точке x при равномерном шаге выбранных узлов $x_1$ ($x_1 - x_{i-1} = \Delta x$ = const, i = 2, 3, ..., n) и выборе в качестве интерполирующей функции полинома (n — 1)-й степени

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^{i-1}, \quad 2 \leqslant n \leqslant 8.$$

Значение x может выходить за пределы интервала $x_1 - x_n$, при этом получаем экстраполяцию функции y (x).

Для вычисления f (x) используется интерполяционная формула Лагранжа [14]:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \sum_{i=1}^{n} y_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{p - j + 1}{i - j},$$

где

$$p = \frac{x - x_1}{\Delta x}.$$

Для вычисления f (x) по программам III.1.1. .../21 значения $y_i$ помещаются вручную в регистры памяти, имеющие номер i + 1 ($y_1$ — в рег. 2, $y_2$ — в рег. 3 и т. д.).

По программам III.1.1. .../54, 52 значения $y_i$ помещаются в регистры памяти с совпадающими номерами ($y_1$ — в рег. 1, $y_2$ — в рег. 2 и т. д.).

После ввода последнего значения $y_n$ в очередные по номерам регистры памяти вводятся соответственно $x_1$ и $\Delta x$.

Вычисление каждого значения f (x) производится командами x В/О С/П.

#### III.1.1.1. ЛИНЕЙНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

$$f(x) = y_1 + (y_2 - y_1)\, p.$$

Программа III.1.1.1/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Инструкция |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | ↑ | 06 | 13 | Р/—/ | 53 | |
| 01 | F4 | 42 | 14 | × | 26 | $y_1 \to$ P2, $y_2 \to$ P3, |
| 02 | — | 86 | 15 | ↑ | 06 | $x_1 \to$ P4, $\Delta x \to$ P5 |
| 03 | Р, | 43 | 20 | F5 | 52 | x В/О С/П x В/О С/П... |
| 04 | F3 | 32 | 21 | : | 36 | |
| 05 | ↑ | 06 | 22 | ↑ | 06 | Регистры |
| 10 | F2 | 22 | 23 | F2 | 22 | 2 $y_1$ |
| 11 | — | 86 | 24 | + | 96 | 3 $y_2$ |
| 12 | ↑ | 06 | 25 | С/П | 78 | 4 $x_1$ |
| | | | | | | 5 $\Delta x$ |

Программа III.1.1.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Инструкция |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | П→x3 | 63 | 06 | П→x4 | 64 | $y_1$ x→П1, $y_2$ x→П2 |
| 01 | — | 11 | 07 | : | 13 | $x_1$ x→П3, $\Delta x$ x→П4 |
| 02 | П→x2 | 62 | 08 | П→x1 | 61 | x В/О С/П x В/О С/П... |
| 03 | П→x1 | 61 | 09 | + | 10 | Регистры |
| 04 | — | 11 | 10 | С/П | 50 | 1 $y_1$ |
| 05 | × | 12 | | | | 2 $y_2$ |
| | | | | | | 3 $x_1$ |
| | | | | | | 4 $\Delta x$ |

Время вычисления — 2 — 3 с.

*Пример*. Зная координаты двух точек $x_1 = 1$, $y_1 = 5$, $x_2 = 3$, $y_2 = 9$ ($\Delta x = 2$) некоторой функции y (x), найти приближенно ее значение в точке $x = 2{,}5$.

Ответ: f (2, 5) = 8.

### III.1.1.2. КВАДРАТИЧНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

$$f(x) = \frac{p-1}{2}\left[p \cdot y_3 + (p-2)\, y_1\right] - p\,(p-2)\, y_2.$$

Программа III.1.1.2/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | ↑ | 06 | 31 | Р/—/ | 53 | 62 | Р/—/ | 53 |
| 01 | F5 | 52 | 32 | + | 96 | 63 | ←→ | 16 |
| 02 | — | 86 | 33 | ↑ | 06 | 64 | — | 86 |
| 03 | ↑ | 06 | 34 | Р/—/ | 53 | 65 | С/П | 78 |
| 04 | F6 | 62 | 35 | Р7 | 71 | | | |
| 05 | : | 36 | 40 | × | 26 | | Инструкция | |
| 10 | ↑ | 06 | 41 | — | 86 | | | |

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 11 | P, | 43 | 42 | /—/ | 56 |
| 12 | F4 | 42 | 43 | 2 | 24 |
| 13 | × | 26 | 44 | : | 36 |
| 14 | P, | 43 | 45 | P, | 43 |
| 15 | ←→ | 16 | 50 | F7 | 72 |
| 20 | 2 | 24 | 51 | ↑ | 06 |
| 21 | — | 86 | 52 | F8 | 82 |
| 22 | P8 | 81 | 53 | × | 26 |
| 23 | ↑ | 06 | 54 | ↑ | 06 |
| 24 | F2 | 22 | 55 | F3 | 32 |
| 25 | × | 26 | 60 | × | 26 |
| 30 | ↑ | 06 | 61 | ↑ | 06 |

$y_1 \to$P2 $y_2 \to$P3
$y_3 \to$P4
$x_1 \to$P5 $\Delta x \to$P6
x В/О С/П x В/О С/П...
Регистры

| | |
|---|---|
| 2 | $y_1$ |
| 3 | $y_2$ |
| 4 | $y_3$ |
| 5 | $x_1$ |
| 6 | $\Delta x$ |
| 7 | p |
| 8 | оперативный |

Программа III.1.1.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | П→x4 | 64 | 14 | П→x6 | 66 |
| 01 | — | 11 | 15 | 1 | 01 |
| 02 | П→x5 | 65 | 16 | — | 11 |
| 03 | : | 13 | 17 | × | 12 |
| 04 | x→П6 | 46 | 18 | 2 | 02 |
| 05 | П→x3 | 63 | 19 | : | 13 |
| 06 | × | 12 | 20 | П→x6 | 66 |
| 07 | П→x6 | 66 | 21 | П→x7 | 67 |
| 08 | 2 | 02 | 22 | × | 12 |
| 09 | — | 11 | 23 | П→x2 | 62 |
| 10 | x→П7 | 47 | 24 | × | 12 |
| 11 | П→x1 | 61 | 25 | — | 11 |
| 12 | × | 12 | 26 | С/П | 50 |
| 13 | + | 10 | | | |

Инструкция

$y_1$ x→П1 $y_2$ x→П2
$y_3$ x→П3 $x_1$x→П4
$\Delta x$ x→П5
x В/О С/П x В/О С/П...
Регистры

| | |
|---|---|
| 1 | $y_1$ |
| 2 | $y_2$ |
| 3 | $y_3$ |
| 4 | $x_1$ |
| 5 | $\Delta x$ |
| 6 | p |
| 7 | p—2 |

Время вычисления — 6 — 8 с.

*Пример.* Зная три точки $y_1 = 1$, $y_2 = 10$, $y_3 = 37$, $x_1 = 1$; $\Delta x = 3$ некоторой функции y (x), найти приближенно ее значения в точке x = 5,5.

Ответ: f (5,5) = 21,25.

### III.1.1.3. КУБИЧЕСКАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

$$f(x) = \frac{(p-1)(p-2)}{6}[py_4 - (p-3)y_1] + \frac{p(p-3)}{2}[(p-2)y_2 - (p-1)y_3].$$

Программа III.1.1.3/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | ↑ | 06 | 41 | P, | 43 | 82 | P/—/ | 53 |
| 01 | F6 | 62 | 42 | F8 | 82 | 83 | × | 26 |
| 02 | — | 86 | 43 | 3 | 34 | 84 | ←→ | 16 |
| 03 | ↑ | 06 | 44 | — | 86 | 85 | × | 26 |
| 04 | F7 | 72 | 45 | ↑ | 06 | 90 | + | 96 |
| 05 | : | 36 | 50 | P/—/ | 53 | 91 | ↑ | 06 |
| 10 | P8 | 81 | 51 | × | 26 | 92 | P/—/ | 53 |
| 11 | 1 | 14 | 52 | P, | 43 | 93 | — | 86 |
| 12 | — | 86 | 53 | F2 | 22 | 94 | С/П | 78 |
| 13 | ↑ | 06 | 54 | × | 26 | | | |
| 14 | F4 | 42 | 55 | P, | 43 | | Инструкция | |
| 15 | × | 26 | 60 | F8 | 82 | | | |
| 20 | P, | 43 | 61 | ↑ | 06 | $y_1$→P2 $y_2$→P3 $y_3$→P4 | | |
| 21 | F3 | 32 | 62 | F5 | 52 | $y_4$→P5 $x_1$→P6 Δx→P7 | | |
| 22 | ←→ | 16 | 63 | × | 26 | x В/О С/П x В/О С/П... | | |
| 23 | × | 26 | 64 | ↑ | 06 | | | |
| 24 | — | 86 | 65 | P/—/ | 53 | | Регистры | |
| 25 | ↑ | 06 | 70 | — | 86 | | | |
| 30 | P/—/ | 53 | 71 | 6 | 64 | 2 | $y_1$ | |
| 31 | + | 96 | 72 | : | 36 | 3 | $y_2$ | |
| 32 | ↑ | 06 | 73 | P, | 43 | 4 | $y_3$ | |
| 33 | F8 | 82 | 74 | F8 | 82 | 5 | $y_4$ | |
| 34 | × | 26 | 75 | 2 | 24 | 6 | $x_1$ | |
| 35 | 2 | 24 | 80 | — | 86 | 7 | Δx | |
| 40 | : | 36 | 81 | ↑ | 06 | 8 | p | |

Программа III.1.1.3/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | П→x5 | 65 | 19 | × | 12 | 38 | + | 10 |
| 01 | — | 11 | 20 | П→x3 | 63 | 39 | С/П | 50 |
| 02 | П→x6 | 66 | 21 | — | 11 | | | |
| 03 | : | 13 | 22 | × | 12 | | Инструкция | |
| 04 | x→П7 | 47 | 23 | П→x7 | 67 | | | |
| 05 | Fx² | 22 | 24 | П→x4 | 64 | $y_1$ x→П1 $y_2$ x→П2 | | |
| 06 | П→x7 | 67 | 25 | × | 12 | $y_3$ x→П3 $y_4$ x→П4 | | |
| 07 | 3 | 03 | 26 | П→x7 | 67 | $x_1$ x→П5 Δx x→П6 | | |
| 08 | × | 12 | 27 | 3 | 03 | x В/О С/П x В/О С/П... | | |
| 09 | — | 11 | 28 | — | 11 | | | |
| 10 | x→П8 | 48 | 29 | П→x1 | 61 | | Регистры | |
| 11 | 2 | 02 | 30 | × | 12 | | | |
| 12 | : | 13 | 31 | — | 11 | 1 | $y_1$ | |
| 13 | П→x7 | 67 | 32 | П→x8 | 68 | 2 | $y_2$ | |
| 14 | 2 | 02 | 33 | 2 | 02 | 3 | $y_3$ | |
| 15 | — | 11 | 34 | + | 10 | 4 | $y_4$ | |
| 16 | П→x2 | 62 | 35 | × | 12 | 5 | $x_1$ | |
| 17 | П→x3 | 63 | 36 | 6 | 06 | 6 | Δx | |
| 18 | — | 11 | 37 | : | 13 | 7 | p | |
| | | | | | | 8 | оперативный | |

Время вычисления — 12 с.

*Пример.* $y_1 = 2$, $y_2 = 4$, $y_3 = 8$, $y_4 = 13$, $x_1 = 1$, $\Delta x = 2$, $x = 3{,}5$.

Решение. $f(3{,}5) = 4{,}852$.

### III.1.1.4. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПОЛИНОМОМ ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ

$$f(x) = \frac{p-2}{6}\left\{\frac{(p-3)(p-4)}{4}[(p-4)y_1 + py_5] - p(p-4)[(p-3)y_1 + (p-1)y_4] + \frac{p(p-1)(p-3)(p-4)}{4}y_3\right\}.$$

Программа III.1.1.4/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | П→x6 | 66 | 22 | 4 | 04 | 44 | П→x8 | 68 |
| 01 | — | 11 | 23 | : | 13 | 45 | П→x3 | 63 |
| 02 | П→x7 | 67 | 24 | П→x9 | 69 | 46 | × | 12 |
| 03 | : | 13 | 25 | 1 | 01 | 47 | П→xA | 6— |
| 04 | x→П9 | 49 | 26 | — | 11 | 48 | × | 12 |
| 05 | П→x5 | 65 | 27 | П→x4 | 64 | 49 | 4 | 04 |
| 06 | × | 12 | 28 | × | 12 | 50 | : | 13 |
| 07 | П→x9 | 69 | 29 | П→x9 | 69 | 51 | + | 10 |
| 08 | 4 | 04 | 30 | 3 | 03 | 52 | С/П | 50 |
| 09 | — | 11 | 31 | — | 11 | | | |
| 10 | x→П8 | 48 | 32 | П→x2 | 62 | Инструкция | | |
| 11 | П→x1 | 61 | 33 | × | 12 | | | |
| 12 | × | 12 | 34 | + | 10 | $y_1$—$y_5$ x→П(1—5), | | |
| 13 | + | 10 | 35 | П→x8 | 68 | $x_1$ x→П6 Δx x→П7 | | |
| 14 | П→x9 | 69 | 36 | × | 12 | x В/О С/П x В/О С/П... | | |
| 15 | П→x8 | 68 | 37 | — | 11 | | | |
| 16 | × | 12 | 38 | П→x9 | 69 | Регистры | | |
| 17 | x→П8 | 48 | 39 | 2 | 02 | | | |
| 18 | 3 | 03 | 40 | — | 11 | 1—5 $y_1$—$y_5$ | | |
| 19 | + | 10 | 41 | × | 12 | 6 $x_1$ | | |
| 20 | x→ПА | 4— | 42 | 6 | 06 | 7 Δx | | |
| 21 | × | 12 | 43 | : | 13 | 8—A оперативные | | |

Время вычисления — 18 с.

*Пример.* $y_1 = 1$, $y_2 = 3$, $y_3 = 7$, $y_4 = 9$, $y_5 = 8$, $x_1 = 2$, $\Delta x = 4$, $x = 8$.

Решение. $f(8) = 5{,}07$.

## III.1.1.5. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПОЛИНОМОМ ПЯТОЙ СТЕПЕНИ

$$f(x)=\frac{1}{12}\left\{\frac{(p-2)(p-3)}{2}\left[\frac{(p-1)(p-4)}{5}(py_6-(p-5)y_1)+\right.\right.$$

$$\left.+p(p-5)((p-4)y_2-(p-1)y_5)\right]+p(p-1)(p-4)(p-5)\times$$

$$\left.\times[(p-2)y_4-(p-3)y_3]\right\}.$$

Программа III.1.1.5/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | П→x7 | 67 | 26 | П→xД | 6Г | 52 | + | 10 |
| 01 | — | 11 | 27 | П→x2 | 62 | 53 | П→xC | 6C |
| 02 | П→x8 | 68 | 28 | × | 12 | 54 | 4 | 04 |
| 03 | : | 13 | 29 | П→xB | 6L | 55 | — | 11 |
| 04 | x→П9 | 49 | 30 | П→x5 | 65 | 56 | × | 12 |
| 05 | П→x6 | 66 | 31 | × | 12 | 57 | П→xC | 6C |
| 06 | × | 12 | 32 | — | 11 | 58 | × | 12 |
| 07 | П→x9 | 69 | 33 | П→xC | 6C | 59 | + | 10 |
| 08 | 5 | 05 | 34 | 4 | 04 | 60 | 1 | 01 |
| 09 | — | 11 | 35 | — | 11 | 61 | 2 | 02 |
| 10 | П→x1 | 61 | 36 | × | 12 | 62 | : | 13 |
| 11 | × | 12 | 37 | + | 10 | 63 | С/П | 50 |
| 12 | — | 11 | 38 | П→xC | 6C | | | |
| 13 | П→x9 | 69 | 39 | 2 | 02 | | Инструкция | |
| 14 | 1 | 01 | 40 | + | 10 | | | |
| 15 | — | 11 | 41 | × | 12 | $y_1$—$y_6$ x→П (1—6) | | |
| 16 | x→ПB | 4L | 42 | 2 | 02 | $x_1$ x→П7 Δx x→П8 | | |
| 17 | П→x9 | 69 | 43 | : | 13 | x В/О С/П x В/О С/П... | | |
| 18 | 4 | 04 | 44 | П→x9 | 69 | | | |
| 19 | — | 11 | 45 | 2 | 02 | | Регистры | |
| 20 | x→ПД | 4Г | 46 | — | 11 | | | |
| 21 | × | 12 | 47 | П→x4 | 64 | 1—6 | $y_1$—$y_6$ | |
| 22 | x→ПC | 4C | 48 | П→x3 | 63 | 7 | $x_1$ | |
| 23 | × | 12 | 49 | — | 11 | 8 | Δx | |
| 24 | 5 | 05 | 50 | × | 12 | 9 | p | |
| 25 | : | 13 | 51 | П→x3 | 63 | А—Д оперативные | | |

Время вычисления — 21 с.

*Пример.* $y_1 = 2$, $y_2 = 3$, $y_3 = 5$, $y_4 = 7$, $y_5 = 12$, $y_6 = 20$, $x_1 = 3$, $\Delta x = 2$, $x = 10$.

Решение. $f(10) = 8{,}973$.

## III.1.1.6. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПОЛИНОМОМ ШЕСТОЙ СТЕПЕНИ

$$f(x)=\frac{1}{12}\left\{\frac{(p-2)(p-3)(p-4)}{20}\left[\frac{(p-1)(p-5)}{6}((p-6)y_1+py_7)-\right.\right.$$

$$\left.-p(p-6)((p-5)y_2+(p-1)y_6)\right]+p(p-1)(p-5)(p-6)\times$$

$$\left.\times\left[\frac{(p-3)}{4}((p-4)y_3+(p-2)y_5)-\frac{(p-2)(p-4)}{3}y_4\right]\right\}.$$

Программа III.1.1.6/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | П→x8 | 68 | 31 | П→x2 | 62 | 62 | П→xA | 6— |
| 01 | — | 11 | 32 | × | 12 | 63 | 8 | 08 |
| 02 | П→x9 | 69 | 33 | + | 10 | 64 | + | 10 |
| 03 | : | 13 | 34 | П→xA | 6— | 65 | П→x4 | 64 |
| 04 | x→ПВ | 4L | 35 | × | 12 | 66 | × | 12 |
| 05 | П→x1 | 61 | 36 | — | 11 | 67 | 6 | 06 |
| 06 | П→x7 | 67 | 37 | П→xA | 6— | 68 | : | 13 |
| 07 | + | 10 | 38 | 8 | 08 | 69 | — | 11 |
| 08 | × | 12 | 39 | + | 10 | 70 | П→xA | 6— |
| 09 | 6 | 06 | 40 | × | 12 | 71 | × | 12 |
| 10 | : | 13 | 41 | 2 | 02 | 72 | П→xC | 6C |
| 11 | П→x1 | 61 | 42 | 0 | 00 | 73 | × | 12 |
| 12 | — | 11 | 43 | : | 13 | 74 | + | 10 |
| 13 | П→xB | 6L | 44 | П→xB | 6L | 75 | 6 | 06 |
| 14 | П→xB | 6L | 45 | 3 | 03 | 76 | : | 13 |
| 15 | 6 | 06 | 46 | — | 11 | 77 | С/П | 50 |
| 16 | — | 11 | 47 | × | 12 | | | |
| 17 | × | 12 | 48 | FBx | 0 | | Инструкция | |
| 18 | x→ПА | 4— | 49 | x→ПВ | 4L | | | |
| 19 | 5 | 05 | 50 | П→x3 | 63 | $y_1$—$y_7$ x→П (1—7) | | |
| 20 | + | 10 | 51 | П→x5 | 65 | $x_1$ x→П8 Δx x→П9 | | |
| 21 | x→ПС | 4C | 52 | + | 10 | x В/О С/П x В/О С/П... | | |
| 22 | × | 12 | 53 | × | 12 | | | |
| 23 | П→xB | 6L | 54 | П→x3 | 63 | | Регистры | |
| 24 | 1 | 01 | 55 | — | 11 | | | |
| 25 | — | 11 | 56 | П→x5 | 65 | 1—7 | $y_1$—$y_7$ | |
| 26 | П→x6 | 66 | 57 | + | 10 | 8 | $x_1$ | |
| 27 | × | 12 | 58 | П→xB | 6L | 9 | Δx | |
| 28 | П→xB | 6L | 59 | × | 12 | А—С оперативные | | |
| 29 | 5 | 05 | 60 | 8 | 08 | | | |
| 30 | — | 11 | 61 | : | 13 | | | |

Время вычисления — 27 с.

*Пример.* $y_1 = 7$, $y_2 = 4$, $y_3 = 2$, $y_4 = 3$, $y_5 = 5$, $y_6 = 8$, $y_7 = 9$, $x_1 = 5$, $\Delta x = 5$, $x = 22$.

Решение. $f(22) = 3{,}722$.

## III.1.1.7. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПОЛИНОМОМ СЕДЬМОЙ СТЕПЕНИ

$$f(x)=\frac{(p-1)(p-2)(p-5)(p-6)}{3!\ 4!}\left\{p(p-7)[(p-4)y_4-(p-3)y_5]-\right.$$
$$-\frac{(p-3)(p-4)}{35}[(p-7)\ y_1-py_8]\Big\}+\frac{p(p-3)(p-4)(p-7)}{2\cdot 5!}\times$$
$$\times\left\{\frac{(p-2)(p-3)}{3}[(p-6)\ y_2-(p-1)\ y_7-\right.$$
$$\left.-(p-1)(p-6)[(p-5)\ y_3-(p-2)\ y_6]\right\}.$$

Программа III.1.1.7/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | П→x9 | 69 | 37 | — | 11 | 74 | 4 | 04 |
| 01 | — | 11 | 38 | × | 12 | 75 | + | 10 |
| 02 | П→xA | 6— | 39 | + | 10 | 76 | × | 12 |
| 03 | : | 13 | 40 | П→xД | 6Г | 77 | 3 | 03 |
| 04 | x→ПС | 4C | 41 | × | 12 | 78 | : | 13 |
| 05 | П→x8 | 68 | 42 | П→xД | 6Г | 79 | + | 10 |
| 06 | П→x1 | 61 | 43 | 4 | 04 | 80 | П→xД | 6Г |
| 07 | — | 11 | 44 | + | 10 | 81 | Fx² | 22 |
| 08 | × | 12 | 45 | × | 12 | 82 | 3 | 03 |
| 09 | 7 | 07 | 46 | 3 | 03 | 83 | 6 | 06 |
| 10 | : | 13 | 47 | : | 13 | 84 | — | 11 |
| 11 | П→x1 | 61 | 48 | x→ПВ | 4L | 85 | × | 12 |
| 12 | + | 10 | 49 | П→xС | 6C | 86 | 5 | 05 |
| 13 | 5 | 05 | 50 | 2 | 02 | 87 | : | 13 |
| 14 | : | 13 | 51 | — | 11 | 88 | П→xВ | 6L |
| 15 | П→xС | 6C | 52 | П→x6 | 66 | 89 | + | 10 |
| 16 | 1 | 01 | 53 | × | 12 | 90 | 4 | 04 |
| 17 | — | 11 | 54 | П→xС | 6C | 91 | 8 | 08 |
| 18 | П→xС | 6C | 55 | 5 | 05 | 92 | : | 13 |
| 19 | 6 | 06 | 56 | — | 11 | 93 | С/П | 50 |
| 20 | — | 11 | 57 | П→x3 | 63 | | | |
| 21 | × | 12 | 58 | × | 12 | | Инструкция | |
| 22 | x→ПД | 4Г | 59 | — | 11 | | | |
| 23 | 6 | 06 | 60 | П→xД | 6Г | $y_1$—$y_8$ x→П (1—8) | | |
| 24 | + | 10 | 61 | × | 12 | $x_1$ x→П9 Δx x→ПА | | |
| 25 | × | 12 | 62 | П→xС | 6C | x В/О С/П x В/О С/П... | | |
| 26 | П→xС | 6C | 63 | 6 | 06 | | | |
| 27 | 4 | 04 | 64 | — | 11 | | Регистры | |
| 28 | — | 11 | 65 | П→x2 | 62 | | | |
| 29 | П→x4 | 64 | 66 | × | 12 | 1—8 | $y_1$—$y_8$ | |
| 30 | П→x5 | 65 | 67 | П→xС | 6C | 9 | $x_1$ | |
| 31 | — | 11 | 68 | 1 | 01 | A | Δx | |
| 32 | × | 12 | 69 | — | 11 | B, Д | оперативные | |
| 33 | П→x5 | 65 | 70 | П→x7 | 67 | C | p | |
| 34 | — | 11 | 71 | × | 12 | | | |
| 35 | П→xД | 6Г | 72 | — | 11 | | | |
| 36 | 6 | 06 | 73 | П→xД | 6Г | | | |

Время вычисления — 32 с.

*Пример.* $y_1 = -2$, $y_2 = 1$, $y_3 = 5$, $y_4 = 6$, $y_5 = 6$, $y_6 = 4$, $y_7 = 2$, $y_8 = 3$, $x_1 = 2$, $\Delta x = 4$, $x = 12$.

Решение. $f(12) = 5{,}656$.

### III.1.1.8. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПОЛИНОМОМ СТЕПЕНИ m

Приводится универсальная программа для вычисления f (x) при интерполяции полиномом степени $m = n - 1 \leqslant 7$.

При использовании МК-52 замена в адресах 04 и 24 соответственно команд x → ПД на x → ПЕ и П → x Д на П → xE позволяет увеличить количество узлов до 9 и, таким образом, производить интерполяцию полиномом до восьмой степени, помещая значение $y_9$ в регистр памяти ПД. Регистр Е используется для хранения значения p, а остальные регистры остаются без изменений.

Программа III.1.1.8/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | П→x2 | 62 | 21 | Fx≠0 | 57 | 42 | Fx=0 | 5E |
| 01 | — | 11 | 22 | 31 | 31 | 43 | 09 | 09 |
| 02 | П→x3 | 63 | 23 | : | 13 | 44 | + | 10 |
| 03 | : | 13 | 24 | П→xД | 6Г | 45 | С/П | 50 |
| 04 | x→ПД | 4Г | 25 | П→x0 | 60 | | | |
| 05 | 0 | 00 | 26 | + | 10 | | Инструкция | |
| 06 | В↑ | 0E | 27 | П→x1 | 61 | n x→П1 $x_1$ x→П2 | | |
| 07 | 4 | 04 | 28 | — | 11 | Δx x→П3 | | |
| 08 | x→П4 | 44 | 29 | × | 12 | $y_1$—$y_8$ x→П (5—C) | | |
| 09 | F. | 25 | 30 | 0 | 00 | x В/О С/П x В/О С/П... | | |
| 10 | 1 | 01 | 31 | + | 10 | | | |
| 11 | П→x1 | 61 | 32 | FL0 | 5Г | | Регистры | |
| 12 | x→П0 | 40 | 33 | 14 | 14 | | | |
| 13 | F. | 25 | 34 | КП→x4 | Г4 | 0—4 | оперативные | |
| 14 | П→x4 | 64 | 35 | × | 12 | | 1 | n |
| 15 | П→x0 | 60 | 36 | + | 10 | | 2 | $x_1$ |
| 16 | + | 10 | 37 | П→x4 | 64 | | 3 | Δx |
| 17 | 4 | 04 | 38 | П→x1 | 61 | | 5—C | $y_1$—$y_8$ |
| 18 | — | 11 | 39 | — | 11 | | Д | p |
| 19 | П→x1 | 61 | 40 | 4 | 04 | | | |
| 20 | — | 11 | 41 | — | 11 | | | |

Время вычисления составляет $T \simeq \frac{(n+1)^2}{9}$ мин.

В качестве примеров следует использовать примеры, помещенные в разделах III.1.1.1 — III.1.1.7.

### III.1.2. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПЛОСКОСТЬЮ

Для интерполяции в пространстве используется интерполяция двумерной функции z (x, y) плоскостью по формуле

$$f = f(x, y) = A + Bx + Cy$$

при задании значений истинной функции $z = z(x, y)$ в трех произвольных узлах: $z_1 = z(x_1, y_1)$, $z_2 = z(x_2, y_2)$, $z_3 = z(x_3, y_3)$.

Для вычисления f используется соотношение [13]

$$\begin{vmatrix} z_1 - f & z_2 - f & z_3 - f \\ y_1 - y & y_2 - y & y_3 - y \\ x_1 - x & x_2 - x & x_3 - x \end{vmatrix} = 0.$$

Исходные значения $x_1$, $x_2$, $x_3$, $y_1$, $y_2$, $y_3$, $z_1$, $z_2$, $z_3$ вручную вводятся в регистры памяти согласно приведенной таблице

$$\begin{Vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Программа III.1.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | 6 | 06 | 21 | × | 12 | 42 | БП | 51 |
| 01 | x→П 0 | 40 | 22 | П→x 6 | 66 | 43 | 27 | 27 |
| 02 | П→x 6 | 66 | 23 | П→x 4 | 64 | 44 | — | 11 |
| 03 | П→x 4 | 64 | 24 | ПП | 53 | 45 | П→x 8 | 68 |
| 04 | ПП | 53 | 25 | 51 | 51 | 46 | П→x 7 | 67 |
| 05 | 44 | 44 | 26 | x→П C | 4C | 47 | — | 11 |
| 06 | x→П A | 4— | 27 | C/П | 50 | 48 | × | 12 |
| 07 | КП→x 0 | Г0 | 28 | П→x 4 | 64 | 49 | П→x 9 | 69 |
| 08 | П→x 3 | 63 | 29 | — | 11 | 50 | П→x 7 | 67 |
| 09 | П→x 1 | 61 | 30 | П→x B | 6L | 51 | — | 11 |
| 10 | ПП | 53 | 31 | × | 12 | 52 | К П→x 0 | Г0 |
| 11 | 44 | 44 | 32 | ←→ | 14 | 53 | К П→x 0 | Г0 |
| 12 | x→П B | 4L | 33 | П→x 1 | 61 | 54 | — | 11 |
| 13 | 3 | 03 | 34 | — | 11 | 55 | × | 12 |
| 14 | x→П 0 | 40 | 35 | П→x A | 6— | 56 | — | 11 |
| 15 | П→x 3 | 63 | 36 | × | 12 | 57 | B/O | 52 |
| 16 | П→x 1 | 61 | 37 | — | 11 | | | |
| 17 | — | 11 | 38 | П→x C | 6C | | Регистры | |
| 18 | П→x 5 | 65 | 39 | : | 13 | | | |
| 19 | П→x 4 | 64 | 40 | П→x 7 | 67 | 0, A—C оперативные | | |
| 20 | — | 11 | 41 | + | 10 | 1—9 $y_1$—$y_9$ | | |

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Занести $x_1 - x_3$, $y_1 - y_3$, $z_1 - z_3$ в регистры памяти 1—9 | $x_1$—$x_3$<br>$y_1$—$y_3$<br>$z_1$—$z_3$ | x→П (1—3)<br>x→П (4—6)<br>x→П (7—9) | |
| 2. Выполнить предварительное вычисление | | В/О С/П | |
| 3. Занести значения x и y и вычислить f (x, y) | x<br>y | В↑<br>С/П | f(x, y) |
| 4. Для интерполяции в другой точке — к п. 3 | | | |

Время выполнения предварительного вычисления — 15 с, вычисления f (x, y) — 5 с.

*Пример.*

Исходные значения задаются таблично

$$\left\|\begin{matrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix}\right\| \Rightarrow \left\|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \end{matrix}\right\|.$$

Вычислить f (x, y,) при x = 1,5; y = 2,5.

Решение. f (1,5; 2,5) = 0,8333.

## III.2 НАХОЖДЕНИЕ ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИИ

По приведенным программам определяется локальный минимум заданной функции f (x) или f (x, y). Для определения максимума функции f следует преобразовать ее к виду $f_1 = -f$ или $f_1 = f^{-1}$ и искать минимум функции $f_1$.

### III.2.1. ФУНКЦИЯ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Подпрограмма вычисления функции f (x) располагается в ячейках памяти непосредственно за основной программой и заканчивается командой В/О. Для вычисления f (x) аргумент x берется из регистра X, туда же помещается вычисленное значение f (x).

Перед вычислением начальное значение шага изменения x ($\Delta x$) помещается в регистр памяти 4, а x — в регистр X.

Программа III.2.1/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P3 | 31 | 22 | P3 | 31 |
| 01 | 5 | 54 | 23 | ПП | 68 |
| 02 | $Pe^x$ | 33 | 24 | F, | 45 |
| 03 | $Pe^x$ | 33 | 25 | ↑ | 06 |
| 04 | P2 | 21 | 30 | F2 | 22 |
| 05 | F4 | 42 | 31 | ←→ | 16 |
| 10 | 4 | 44 | 32 | P2 | 21 |
| 11 | : | 36 | 33 | — | 86 |
| 12 | /—/ | 56 | 34 | Px⩾0 | 49 |
| 13 | P4 | 41 | 35 | ↑ | 06 |
| 14 | F3 | 32 | 40 | Px=0 | 59 |
| 15 | ↑ | 06 | 41 | F←→ | 15 |
| 20 | F4 | 42 | 42 | F3 | 32 |
| 21 | — | 86 | 43 | С/П | 78 |

Инструкция

Δx→P4
x В/О С/П

Результат

$x_0$—в рег. X, 3
f ($x_0$)—в рег. 2

Регистры

2 f ($x_0$)
3 $x_0$
4 Δx

Программа III.2.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П3 | 43 | 13 | ПП | 53 |
| 01 | 9 | 09 | 14 | 25 | 25 |
| 02 | $F10^x$ | 15 | 15 | П→x2 | 62 |
| 03 | x→П2 | 42 | 16 | ←→ | 14 |
| 04 | П→x4 | 64 | 17 | x→П2 | 42 |
| 05 | /—/ | 0L | 18 | — | 11 |
| 06 | 4 | 04 | 19 | F x⩾0 | 59 |
| 07 | : | 13 | 20 | 0 4 | 04 |
| 08 | x→П4 | 44 | 21 | F x=0 | 5E |
| 09 | П→x3 | 63 | 22 | 0 9 | 09 |
| 10 | П→x4 | 64 | 23 | П→x3 | 63 |
| 11 | — | 11 | 24 | С/П | 50 |
| 12 | x→П3 | 43 | | | |

Инструкция

Δx x→П4
x В/О С/П

Результат

$x_0$—в рег. X, 3
f ($x_0$)—в рег. 2

Регистры

2 f ($x_0$)
3 $x_0$
4 Δx

*Пример.* Найти минимум функции $f(x) = e^x - x$ при начальных значениях $x = -1$, $\Delta x = 0{,}3$.

Подпрограмма вычисления функции f (x) имеет вид:

а) для программы III.2.1/21 ↑ $Pe^x$ ↔ — В/О

б) для программы III.2.1/54, 52 $Fe^x$ F Bx — В/О

Ответ: $\tilde{x}_0 = \pm (1 - 2) \cdot 10^{-4}$, $f(\tilde{x}_0) = 1$; точные значения соответственно 0 и 1.

Время вычисления примера составляет 3 — 3,5 мин.

## III.2.2. ФУНКЦИЯ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Определяется минимум функции двух переменных f (x, y).

Подпрограмма вычисления f (x, y) располагается в ячейках памяти непосредственно за основной программой и заканчивается командой В/О. Аргументы x и y для вычисления f (x, y) берутся из регистров 1 и 2 соответственно; вычисленное значение f (x, y) помещается в регистр X.

### III.2.2.1. МЕТОД ПОКООРДИНАТНОГО СПУСКА

Программа работает с разной точностью в зависимости от положения переключателя Р/Г: Г — с грубой точностью, Р — с большей точностью.

Программа III.2.2.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Инструкция |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | 9 | 09 | 22 | Fп | 20 | |
| 01 | F $10^x$ | 15 | 23 | /—/ | 0L | x x→П1 |
| 02 | x→ПД | 4Г | 24 | : | 13 | y x→П2 |
| 03 | ПП | 53 | 25 | x→П4 | 44 | Δx x→П3 |
| 04 | 36 | 36 | 26 | П→x3 | 63 | Δy x→П4 |
| 05 | F x≥0 | 59 | 27 | FBx | 0 | В/О С/П |
| 06 | 13 | 13 | 28 | : | 13 | |
| 07 | П→x3 | 63 | 29 | x→П3 | 43 | Результат |
| 08 | П→x1 | 61 | 30 | F cos | 1Г | |
| 09 | + | 10 | 31 | F $\cos^{-1}$ | 1— | f ($x_0$, $y_0$)—в рег. X, Д |
| 10 | x→П1 | 41 | 32 | Fx=0 | 5E | $x_0$—в рег. 1 |
| 11 | БП | 51 | 33 | 07 | 07 | $y_0$—в рег. 2 |
| 12 | 03 | 03 | 34 | П→xД | 6Г | |
| 13 | П→x4 | 64 | 35 | С/П | 50 | Регистры |
| 14 | П→x2 | 62 | 36 | ПП | 53 | |
| 15 | + | 10 | 37 | 43 | 43 | 1 $x_0$ |
| 16 | x→П2 | 42 | 38 | П→xД | 6Г | 2 $y_0$ |
| 17 | ПП | 53 | 39 | ←→ | 14 | 3 $\Delta x_0$ |
| 18 | 36 | 36 | 40 | x→ПД | 4Г | 4 $\Delta y_0$ |
| 19 | Fx<0 | 5C | 41 | — | 11 | Д f ($x_0$, $y_0$) |
| 20 | 13 | 13 | 42 | В/О | 52 | |
| 21 | П→x4 | 64 | | | | |

*Пример.* Найти минимум функции $f(x, y) = (x - 2)^2 + (xy-1)^2$ при начальных значениях $x = 1$, $y = 1$, $\Delta x = 0{,}3$, $\Delta y = 0{,}3$. (Точные значения $x_0 = 2$, $y_0 = 0{,}5$, $f(x_0, y_0) = 0$.)

Подпрограмма вычисления f (x, y) имеет вид П→ x 1 2 — F $x^2$ П→ x 1 П→ x 2×1 — F$x^2$ + В/О

Ответ:
а) переключатель Р/Г в положении Г.

$$\tilde{x}_0 = 1{,}7136,\ \tilde{y}_0 = 0{,}8529,\ f(\tilde{x}_0,\ \tilde{y}_0) = 0{,}2951.$$

Время вычисления примера — 7 мин.
б) переключатель Р/Г в положении Р.

$$\tilde{x}_0 = 1{,}9812,\ \tilde{y}_0 = 0{,}5234,\ f(\tilde{x}_0,\ \tilde{y}_0) = 1{,}72 \cdot 10^{-3}.$$

Время вычисления примера — 1 ч 10 мин.

### III.2.2.2. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Для нахождения минимума функции f (x, y) используется метод квазислучайного поиска.

Шаг изменения по x и y одинаков $\Delta x = \Delta y = \Delta$, начальное значение $\Delta \simeq 0{,}05$ устанавливается программно.

Программа III.2.2.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | 9 | 09 | 24 | 53 | 53 |
| 01 | x→П4 | 44 | 25 | x→ПС | 4C |
| 02 | F10$^x$ | 15 | 26 | П→xД | 6Г |
| 03 | x→ПС | 4C | 27 | — | 11 |
| 04 | F ln | 18 | 28 | Fx⩾0 | 59 |
| 05 | F1/x | 23 | 29 | 07 | 07 |
| 06 | x→П3 | 43 | 30 | П→x3 | 63 |
| 07 | П→xC | 6C | 31 | /—/ | 0L |
| 08 | x→ПД | 4Г | 32 | ПП | 53 |
| 09 | Fπ | 20 | 33 | 38 | 38 |
| 10 | F ln | 18 | 34 | КП→x4 | Г4 |
| 11 | П→x3 | 63 | 35 | 2 | 02 |
| 12 | × | 12 | 36 | БП | 51 |
| 13 | x→П3 | 43 | 37 | 10 | 10 |
| 14 | F cos | 1Г | 38 | В↑ | 0E |
| 15 | F cos$^{-1}$ | 1— | 39 | П→x4 | 64 |
| 16 | Fx=0 | 5E | 40 | F cos | 1Г |
| 17 | 20 | 20 | 41 | × | 12 |
| 18 | П→xД | 6Г | 42 | П→x2 | 62 |
| 19 | С/П | 50 | 43 | + | 10 |
| 20 | П→x3 | 63 | 44 | x→П2 | 42 |
| 21 | ПП | 53 | 45 | ←→ | 14 |
| 22 | 38 | 38 | 46 | П→x4 | 64 |
| 23 | ПП | 53 | 47 | F sin | 1C |

| Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|
| 48 | × | 12 |
| 49 | П→x1 | 61 |
| 50 | + | 10 |
| 51 | x→П1 | 41 |
| 52 | В/О | 52 |

Инструкция
Р/Г—в Р
x x→П1
y x→П2
В/О С/П

Результат
f ($x_0$, $y_0$)—в рег. X, Д
$x_0$—в рег. 1
$y_0$—в рег. 2

Регистры
1 x,
2 $y_0$
3 Δ
4, С оперативные
Д f ($x_0$, $y_0$)

*Пример.* Найти минимум функции $f(x, y) = (x - 2)^2 + (xy - 1)^2$ при начальных значениях $x = 1$, $y = 1$.

Подпрограмма вычисления f (x, y) имеет вид П → x 1 2 — F $x^2$ П → x 1 П → x 2 × 1 — F $x^2$ + В/0.

Ответ: $\tilde{x}_0 = 1{,}99993$, $\tilde{y}_0 = 0{,}50013$, $f(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) = 5 \cdot 10^{-8}$.

Время вычисления примера — 45 мин.

## III.3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ

### III.3.1. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ АНАЛИТИЧЕСКИ

#### III.3.1.1. ПО ФОРМУЛЕ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ

Приближенное значение интеграла

$$F = \int_a^b f(x)\,dx$$

вычисляется по формуле [17]

$$\tilde{F} = \Delta \sum_{i=1}^{n} f\left(a - \frac{\Delta}{2} + i\Delta\right),$$

где $\Delta = (b - a)/n$, с фиксированным числом шагов $n$.

Подпрограмма вычисления значения подынтегральной функции f (x) располагается непосредственно за основной программой. Аргумент x и ответ f (x) размещаются в регистре X.

Программа III.3.1.1/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P 5 | 51 | 22 | F 5 | 52 | 44 | F 2 | 22 |
| 01 | — | 86 | 23 | ↑ | 06 | 45 | × | 26 |
| 02 | 0 | 04 | 24 | F 2 | 22 | 50 | С/П | 78 |
| 03 | P 2 | 21 | 25 | + | 96 | | | |
| 04 | F 4 | 42 | 30 | P 2 | 21 | | Инструкция | |
| 05 | : | 36 | 31 | F 4 | 42 | | | |
| 10 | P 3 | 31 | 32 | 1 | 14 | | n→P 4 | |
| 11 | 2 | 24 | 33 | — | 86 | | b ↑ a В/О С/П | |
| 12 | : | 36 | 34 | P 4 | 41 | | | |
| 13 | ↑ | 06 | 35 | ↑ | 06 | | Регистры | |
| 14 | F 5 | 52 | 40 | F 3 | 32 | | | |
| 15 | + | 96 | 41 | ←→ | 16 | | 2 Σ | |
| 20 | P 5 | 51 | 42 | P x=0 | 59 | | 3 Δ | |
| 21 | ПП | 68 | 43 | F ←→ | 15 | | 4; 5 оперативные | |

Программа III.3.1.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П B | 4L | 12 | Cx | 0Г | 24 | П→x Д | 6Г |
| 01 | ←→ | 14 | 13 | x→П C | 4C | 25 | × | 12 |
| 02 | — | 11 | 14 | П→x B | 6L | 26 | С/П | 50 |
| 03 | ←→ | 14 | 15 | П→x Д | 6Г | | Инструкция | |
| 04 | x→П O | 40 | 16 | — | 11 | n B↑ | a B↑ | b B/O С/П |
| 05 | : | 13 | 17 | x→П B | 4L | | | |
| 06 | x→П Д | 4Г | 18 | ПП | 53 | | Регистры | |
| 07 | 2 | 02 | 19 | 27 | 27 | | | |
| 08 | : | 13 | 20 | П→x C | 6C | 0 | счетчик | |
| 09 | П→x B | 6L | 21 | + | 10 | B | $x_1$ | |
| 10 | + | 10 | 22 | F L0 | 5Г | C | F/Δ | |
| 11 | x→П B | 4L | 23 | 13 | 13 | Д | Δ | |

Время вычисления — $T \approx n(3 + \tau_f)$ с, где $\tau_f$ — время вычисления f (x).

*Пример*. Определить приближенное значение интеграла

$$F = \int_0^2 x^4 dx \text{ при } n = 32.$$

Подпрограмма имеет вид F $x^2$ F $x^2$ B/O

Ответ: $\widetilde{F} = 6{,}3948$; точное значение $F = 6{,}4$. Время вычисления — 1 мин 40 с — 2 мин 20 с.

### III.3.1.2. ПО ФОРМУЛЕ СИМПСОНА С ЗАДАННОЙ ТОЧНОСТЬЮ

Приближенное значение интеграла

$$F = \int_a^b f(x)\,dx$$

вычисляется по формуле [11]

$$\widetilde{F} = Fn = \frac{\Delta}{3}\,[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)],$$

где $\Delta = (b-a)/n$, $x_1 = x_0 + i\Delta$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$, $x_0 = a$, $x_n = b$.

Абсолютная погрешность оценивается соотношением

$$\delta = \frac{|F_n - F_{2n}|}{15}.$$

Вычисления ведутся для n = 2, 4, 8, ... до тех пор, пока не будет выполнено соотношение $\delta < \varepsilon$, где $\varepsilon$ — заданная величина.

При вычислении интеграла по удвоенному числу интервалов используются результаты предыдущих вычислений и дополнительно рассчитываются значения функции f (x) только в n точках.

Подпрограмма вычисления значений подынтегральной функции f (x) располагается в ячейках памяти, начиная с адреса 61. Аргумент x и ответ f (x) размещаются в регистре X.

Программа III.3.1.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | ПП | 53 | 27 | 2 | 02 | 54 | — | 11 |
| 01 | 61 | 61 | 28 | : | 13 | 55 | F x<0 | 5C |
| 02 | 2 | 02 | 29 | — | 11 | 56 | 16 | 16 |
| 03 | : | 13 | 30 | x→П 8 | 48 | 57 | П→x 6 | 66 |
| 04 | П→x 6 | 66 | 31 | ПП | 53 | 58 | 3 | 03 |
| 05 | + | 10 | 32 | 61 | 61 | 59 | : | 13 |
| 06 | x→П 6 | 46 | 33 | П→x C | 6C | 60 | С/П | 50 |
| 07 | x→П 9 | 49 | 34 | + | 10 | | | |
| 08 | С/П | 50 | 35 | x→П C | 4C | | Инструкция | |
| 09 | П→x B | 6L | 36 | П→x 8 | 68 | | | |
| 10 | П→x A | 6— | 37 | П→x 7 | 67 | | Cx x→П 6 | |
| 11 | — | 11 | 38 | — | 11 | | а x→П A B/O С/П | |
| 12 | x→П A | 4— | 39 | F L0 | 5Г | | в x→П B B/O С/П | |
| 13 | 2 | 02 | 40 | 30 | 30 | | (45 ε)² x→П Д С/П | |
| 14 | F 1/x | 23 | 41 | П→x 6 | 66 | | | |
| 15 | x→П 5 | 45 | 42 | П→x C | 6C | | Регистры | |
| 16 | Cx | 0Г | 43 | B↑ | 0E | | | |
| 17 | x→П C | 4C | 44 | П→x 9 | 69 | 0 | счетчик | |
| 18 | П→x B | 6L | 45 | + | 10 | 5 | п/2 | |
| 19 | П→x A | 6— | 46 | x→П 9 | 49 | 6 | $3F_n$ | |
| 20 | П→x 5 | 65 | 47 | + | 10 | 7 | 2Δ | |
| 21 | 2 | 02 | 48 | П→x 7 | 67 | 8 | $x_1$ | |
| 22 | × | 12 | 49 | × | 12 | 9 | оперативный | |
| 23 | x→П 5 | 45 | 50 | x→П 6 | 46 | A | а; (в—а) | |
| 24 | x→П 0 | 40 | 51 | — | 11 | B | в | |
| 25 | : | 13 | 52 | F x² | 22 | C | Σ f | |
| 26 | x→П 7 | 47 | 53 | П→x Д | 6Г | Д | (45 ε)² | |

*Пример*. Определить приближенное значение интеграла $F = \int_0^2 e^x\,dx$ с абсолютной погрешностью $\delta \leqslant 0{,}003$.

Решение. $\varepsilon = 0{,}003$. Подпрограмма вычисления значений подынтегральной функции имеет вид Fe$^x$ B/O

Ответ: $\tilde{F} = 6{,}3912$; точное значение $F = 6{,}3891$.

Время вычисления примера — 35 с.

### III. 3.1.3. ПО ФОРМУЛЕ БОДЕ С ЗАДАННОЙ ТОЧНОСТЬЮ

Приближенное значение интеграла вычисляется по формуле

$$F = \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{16S_{2n} - S_n}{15} = F_n,$$

где $S_n = \frac{1}{3}\frac{(b-a)}{n}[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+\ldots+4f(x_{n-1})+f(x_n)]$;

$$x_i = x_0 + i\frac{(b-a)}{n} \quad (i=0, 1, \ldots, n),\ x_0 = a,\ x_n = b.$$

Абсолютная погрешность оценивается соотношением [11]

$$\delta = \frac{|F_{2n}-F_n|}{63}.$$

Вычисления ведутся для $n = 2, 4, 8, \ldots$ до тех пор, пока не будет выполнено соотношение $\delta < \varepsilon$, где $\varepsilon$ — заданная величина.

При вычислении интеграла по удвоенному числу интервалов используются результаты предыдущих вычислений и дополнительно рассчитываются значения функции f (x) только в n точках.

Подпрограмма вычисления значений подынтегральной функции располагается в ячейках памяти, начиная с адреса 68. Аргумент x и ответ f (x) — в регистре X.

Программа III.3.1.3/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | ПП | 53 | 30 | ПП | 53 | 60 | 15 | 15 |
| 01 | 68 | 68 | 31 | 68 | 68 | 61 | П→x 6 | 66 |
| 02 | 2 | 02 | 32 | П→x 9 | 69 | 62 | 2 | 02 |
| 03 | : | 13 | 33 | + | 10 | 63 | 2 | 02 |
| 04 | П→x C | 6C | 34 | x→П 9 | 49 | 64 | . | 0— |
| 05 | + | 10 | 35 | П→x 8 | 68 | 65 | 5 | 05 |
| 06 | x→П C | 4C | 36 | П→x 7 | 67 | 66 | : | 13 |
| 07 | C/П | 50 | 37 | + | 10 | 67 | C/П | 50 |
| 08 | П→x A | 6— | 38 | F L0 | 5Г | | | |
| 09 | П→x B | 6L | 39 | 29 | 29 | | Инструкция | |
| 10 | — | 11 | 40 | П→x 6 | 66 | | | |
| 11 | x→П A | 4— | 41 | П→x 4 | 64 | | Cx x→П C | |
| 12 | 2 | 02 | 42 | П→x C | 6C | | a x→П A B/O C/П | |
| 13 | F 1/x | 23 | 43 | П→x 9 | 69 | | в x→П B B/O C/П | |
| 14 | x→П 5 | 45 | 44 | + | 10 | | (423 ε)² x→П Д C/П | |
| 15 | Cx | 0Г | 45 | x→П C | 4C | | | |
| 16 | x→П 9 | 49 | 46 | П→x 9 | 69 | | Регистры | |
| 17 | П→x B | 6L | 47 | + | 10 | | 0 счетчик | |
| 18 | П→x A | 6— | 48 | x→П 4 | 44 | | | |
| 19 | П→x 5 | 65 | 49 | 8 | 08 | | 4 $16\cdot S_{2n}$ | |
| 20 | 2 | 02 | 50 | × | 12 | | 5 n | |
| 21 | × | 12 | 51 | — | 11 | | 6 $22{,}5\cdot F_n$ | |
| 22 | x→П 5 | 45 | 52 | П→x 7 | 67 | | 7 (a—в)/n | |
| 23 | x→П 0 | 40 | 53 | × | 12 | | 8 $x_1$ | |
| 24 | : | 13 | 54 | x→П 6 | 46 | | 9 оперативный | |
| 25 | x→П 7 | 47 | 55 | — | 11 | | A a; (a—в) | |
| 26 | 2 | 02 | 56 | F $x^2$ | 22 | | B в | |
| 27 | : | 13 | 57 | П→x Д | 6Г | | C Σ f | |
| 28 | + | 10 | 58 | — | 11 | | Д (423 ε)² | |
| 29 | x→П 8 | 48 | 59 | F x<0 | 5C | | | |

*Пример.* Определить приближенное значение интеграла $F = \int_2^5 e^x dx$ с абсолютной погрешностью $\delta \leqslant 1 \cdot 10^{-5}$.

Решение. $\varepsilon = 1 \cdot 10^{-5}$.

Подпрограмма вычисления значений подынтегральной функции имеет вид $Fe^x$ В/О

Ответ: $\widetilde{F} = 141,\ 02408$; точное значение $F = 141,\ 02420$.

Время вычисления примера — 3 мин 50 с.

### III.3.1.4. ПО МЕТОДУ СУММИРОВАНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМ ШАГОМ

Используется представление интеграла F в виде [7]

$$F = \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{2n} f(x_1) = \widetilde{F}$$

с узлами $x_1 : x_{2j-1} = a + \frac{h}{2}(2j - 1 - 1/\sqrt{3})$, $x_{2j} = a +$

$$+ \frac{h}{2}(2j - 1 + 1/\sqrt{3}),\ j = 1, 2, \ldots, n,$$

где $h = (b - a)/n$.

Подпрограмма вычисления значений подынтегральной функции располагается в ячейках памяти непосредственно за основной программой. Аргумент x и вычисленное значение f (x) помещаются в регистр X.

Программа III.3.1.4/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | — | 86 | 30 | P 7 | 71 | 60 | /—/ | 56 |
| 01 | С/П | 78 | 31 | ПП | 68 | 61 | P x⩾0 | 49 |
| 02 | : | 36 | 32 | P Cx | 73 | 62 | 1 | 14 |
| 03 | 2 | 24 | 33 | ↑ | 06 | 63 | F 6 | 62 |
| 04 | : | 36 | 34 | F 6 | 62 | 64 | ↑ | 06 |
| 05 | P 4 | 41 | 35 | + | 96 | 65 | F 4 | 42 |
| 10 | 3 | 34 | 40 | P 6 | 61 | 70 | × | 26 |
| 11 | F $\sqrt{}$ | 65 | 41 | F 4 | 42 | 71 | С/П | 78 |
| 12 | : | 36 | 42 | ↑ | 06 | Инструкция | | |
| 13 | P 5 | 51 | 43 | F 7 | 72 | Cx P 6 в P 3 a P 2 | | |
| 14 | ↑ | 06 | 44 | + | 96 | В/О С/П п С/П | | |
| 15 | F 2 | 22 | 45 | + | 96 | Регистры | | |
| 20 | + | 96 | 50 | ↑ | 06 | 2 | a | |
| 21 | ↑ | 06 | 51 | F 3 | 32 | 3 | в | |
| 22 | F 4 | 42 | 52 | — | 86 | 4 | h/2 | |
| 23 | + | 96 | 53 | P x⩾0 | 49 | 5 | $h/2\sqrt{3}$ | |
| 24 | ↑ | 06 | 54 | × | 26 | 6 | $\Sigma$ | |
| 25 | ←→ | 16 | 55 | F 5 | 52 | 7 | $x_1$ | |

Время вычисления — $T = 8 + n(7 + 2\tau_f)$ с, где $\tau_f$ — время вычисления f (x).

Программа III.3.1.4/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | Cx | 0Г | 18 | + | 10 | 36 | 16 | 16 |
| 01 | x→П 7 | 47 | 19 | П→x 4 | 64 | 37 | П→x 7 | 67 |
| 02 | С/П | 50 | 20 | + | 10 | 38 | П→x 4 | 64 |
| 03 | x→П 1 | 41 | 21 | x→П6 | 46 | 39 | × | 12 |
| 04 | — | 11 | 22 | ПП | 53 | 40 | В/О | 52 |
| 05 | ←→ | 14 | 23 | 41 | 41 | | | |
| 06 | x→П 2 | 42 | 24 | П→x 7 | 67 | | Инструкция | |
| 07 | x→П 0 | 40 | 25 | + | 10 | | В/О С/П | |
| 08 | : | 13 | 26 | x→П 7 | 47 | n | В↑в В↑ а | С/П |
| 09 | x→П 3 | 43 | 27 | П→x 6 | 66 | | Регистры | |
| 10 | 2 | 02 | 28 | П→x 3 | 63 | 0 | счетчик | |
| 11 | : | 13 | 29 | F L0 | 5Г | 1 | a | |
| 12 | x→П 4 | 44 | 30 | 20 | 20 | 2 | n | |
| 13 | 3 | 03 | 31 | П→x 2 | 62 | 3 | h | |
| 14 | F $\sqrt{-}$ | 21 | 32 | x→П 0 | 40 | 4 | h/2 | |
| 15 | : | 13 | 33 | П→x 5 | 65 | 5 | $h/2\sqrt{3}$ | |
| 16 | x→П 5 | 45 | 34 | /—/ | 0L | 6 | $x_1$ | |
| 17 | П→x 1 | 61 | 35 | F x⩾0 | 59 | 7 | $\widetilde{F}$ | |

Время вычисления — $T = 11 + n(6 + 2\tau_f)$ с, где $\tau_f$ — время вычисления f (x).

*Пример.* Вычислить приближенное значение интеграла $F = \int_0^5 x^4 dx$ при n = 5.

Подпрограмма вычисления f (x) имеет вид F x² F x² В/О

Ответ: $\widetilde{F} = 624,972$; точное значение F = 625.

Время вычисления примера — 50 с.

### III.3.2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ ТАБЛИЧНО

Исходная подынтегральная функция y (x) задана в (n + 1) равноотстоящих узлах $y_0 = y(x_0)$, $y_1 = y(x_1)$, ..., $y_n = y(x_n)$. Интегрирование y (x) производится на интервале $x_0 — x_n$. Введем $\Delta x = \frac{x_n - x_0}{n}$. При четном n интеграл вычисляется по формуле Симпсона [13]

$$\widetilde{F}_n = \frac{\Delta x}{3}[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n] \; (n \geqslant 4).$$

При нечетном n к функции $F_{n-1}$, вычисленной по первым (n — 1) узлам, добавляется интеграл по интервалу $x_{n-1}$, $x_n$, вычисленный по последним трем точкам при параболической аппроксимации,

$$\Delta\widetilde{F} = \frac{\Delta x}{12}[5y_n + 8y_{n-1} - y_{n-2}].$$

Программа III.3.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П B | 4L | 18 | × | 12 | 36 | 4 | 04 |
| 01 | 2 | 02 | 19 | + | 10 | 37 | : | 13 |
| 02 | x→П C | 4C | 20 | БП | 51 | 38 | — | 11 |
| 03 | С/П | 50 | 21 | 05 | 05 | 39 | П→x 9 | 69 |
| 04 | x→П A | 4— | 22 | П→x C | 6C | 40 | + | 10 |
| 05 | П→x A | 6— | 23 | F sin | 1C | 41 | 3 | 03 |
| 06 | С/П | 50 | 24 | F x⩾0 | 59 | 42 | : | 13 |
| 07 | ←→ | 14 | 25 | 30 | 30 | 43 | П→x B | 6L |
| 08 | П→x 9 | 69 | 26 | F . | 25 | 44 | × | 12 |
| 09 | x→П 8 | 48 | 27 | — | 11 | 45 | С/П | 50 |
| 10 | F. | 25 | 28 | БП | 51 | | | |
| 11 | x→П 9 | 49 | 29 | 41 | 41 | | Регистры | |
| 12 | F. | 25 | 30 | F . | 25 | | | |
| 13 | x→П A | 4— | 31 | 1 | 01 | 8 | $y_{n-2}$ | |
| 14 | 6 | 06 | 32 | 1 | 01 | 9 | $y_{n-1}$ | |
| 15 | П→x C | 6C | 33 | × | 12 | A | $y_n$ | |
| 16 | — | 11 | 34 | П→x 8 | 68 | B | Δ x | |
| 17 | x→П C | 4C | 35 | + | 10 | C | 2 или 4 | |

Инструкция III.3.2/54,52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Переключатель Р/Г поставить в положение Р | | | |
| 2. Занести величину шага Δx | Δ x | В/О С/П | |
| 3. Занести очередное значение функции $y_i$ | $y_i$ | С/П | $y_i$ |
| 4. Если исходные данные не исчерпаны — к п. 3 | | | |
| 5. Вычислить величину $\widetilde{F}$ | | БП 22 С/П | $\widetilde{F}$ |

Время ввода одного значения $y_i$ — 5 с.

Время вычисления F после ввода последнего значения $y_n$ — 8 с.

*Примеры.*

1. Вычислить приближенное значение интеграла

$$\int_2^8 (x^4 - 2x)\,dx$$

при нечетном $n = 3$: $y_0 = 12$, $y_1 = 248$, $y_2 = 1284$, $y_3 = 4080$. Величина шага $\Delta x = 2$.

Решение. $\tilde{F} = 6596$; $F = 6487{,}2$.

2. Вычислить приближенное значение этого же интеграла на интервале $(1—9)$ $\int_1^9 (x^4 - 2x)\,dx$

при четном $n = 4$; $y_0 = -1$, $y_1 = 75$, $y_2 = 615$, $y_3 = 2387$, $y_4 = 6543$. Величина шага $\Delta x = 2$.

Решение. $\tilde{F} = 11746{,}667$; $F = 11729{,}6$.

## III.4. РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Приведены программы приближенного решения дифференциальных уравнений первого — пятого порядков:

$y^{(m)} = f(x, y, \ldots, y^{(m-1)})$ $(m = 1 — 5$ — порядок уравнения)

и систем, включающих до четырех уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} y' = f(x, y, \ldots, v), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ v' = r(x, y, \ldots, v), \end{cases}$$

разрешенных относительно старшей производной (x — независимая переменная, по которой берутся все производные) методом Рунге-Кутта. Расчетные формулы хорошо известны (см., например, [11]). Независимая переменная x изменяется с шагом h, который выбирается пользователем и при необходимости может им корректироваться.

Вопросы точности решения изложены в специальной литературе [11].

Универсальный способ контроля точности — повторить вычисления с половинным шагом и сравнить результаты.

Примечание. После вычисления машиной решения на очередном шаге с ним можно в ручном режиме делать различные преобразования, например вычислить отклонение от ожидаемого значения. Можно изменить величину шага h. Программы составлены так, что после нажатия клавиши С/П вычисления продолжаются независимо от содержимого регистров X и Y. Следует только избегать использования регистров, обслуживающих основную программу (они указаны в тексте).

## III.4.1. УРАВНЕНИЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА $y' = f(x, y)$

### III.4.1.1. РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ РУНГЕ-КУТТА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Подпрограмма вычисления f (x, y) располагается в ячейках памяти непосредственно за основной программой и заканчивается командой В/О. Аргументы берутся: x — из регистра 5, y — из регистра 7. Вычисленное значение f (x, y) помещается в регистр X.

Программа III.4.1.1/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P 6 | 61 | 20 | P 5 | 51 |
| 01 | P 7 | 71 | 21 | ПП | 68 |
| 02 | С/П | 78 | 22 | : | 36 |
| 03 | ПП | 68 | 23 | ↑ | 06 |
| 04 | F 2 | 22 | 24 | F 4 | 42 |
| 05 | + | 96 | 25 | × | 26 |
| 10 | P 7 | 71 | 30 | ↑ | 06 |
| 11 | F 4 | 42 | 31 | F 6 | 62 |
| 12 | ↑ | 06 | 32 | + | 96 |
| 13 | F 5 | 52 | 33 | P 6 | 61 |
| 14 | + | 96 | 34 | В/О | 48 |
| 15 | + | 96 | | | |

Инструкция

h/2 P 4
$x_0$ P 5
$y_0$ В/О С/П С/П С/П ...
Результат
$y_0, y_1, y_2, \ldots$

Регистры
4 h/2
5 $x_1$
6; 7 $y_1$

Очередное значение $y_1$ вычисляется за $(5+\tau_f)$ с, где $\tau_f$ — время вычисления f (x, y).

Программа III.4.1.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 6 | 46 | 11 | ПП | 53 |
| 01 | x→П 7 | 47 | 12 | 22 | 22 |
| 02 | С/П | 50 | 13 | 2 | 02 |
| 03 | ПП | 53 | 14 | : | 13 |
| 04 | 11 | 11 | 15 | П→x 4 | 64 |
| 05 | + | 10 | 16 | × | 12 |
| 06 | x→П 7 | 47 | 17 | В↑ | 0E |
| 07 | П→x 5 | 65 | 18 | П→x 6 | 66 |
| 08 | П→x 4 | 64 | 19 | + | 10 |
| 09 | + | 10 | 20 | x→П 6 | 46 |
| 10 | x→П 5 | 45 | 21 | В/О | 52 |

Инструкция

h x→П 4
$x_0$ x→П 5
$y_0$ В/О С/П С/П С/П ...
С/П...
Результат
$y_0, y_1, y_2, \ldots$

Регистры
4 h
5 $x_1$
6; 7 $y_1$

Очередное значение $y_1$ вычисляется за $(8 + \tau_f)$ с, где $\tau_f$ — время вычисления f (x, y).

*Пример.* Решить дифференциальное уравнение $y' = xe^{-y}$ при начальных значениях $x_0 = 0$, $y_0 = 1$. Шаг $h = 0{,}5$.

Подпрограмма имеет вид:

а) для программы III.4.1.1/21 F 5 ↑ F 7 P $e^x$: В/О

б) для программы III.4.1.1/54, 52 П → x 5 П → x 7 $Fe^x$ : В/О

Таблица результатов

| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0 | 0,5 | 1,0 | 1,5 | 2,0 | 2,5 |
| $y_1$ | 1 | 1,0460 | 1,1704 | 1,3475 | 1,5519 | 1,7650 |
| $y_{точн}$ | 1 | 1,0450 | 1,1688 | 1,3463 | 1,5514 | 1,7653 |

Время вычисления одного значения $y_1$ — 8 — 16 с.

### III.4.1.2. РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ РУНГЕ-КУТТА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Подпрограмма вычисления f (x, y) располагается в памяти непосредственно за основной программой и заканчивается командой В/О. Аргументы берутся: x — из регистра 3, y — из регистра 5. Вычисленное значение f (x, y) помещается в регистр X.

Программа III.4.1.2/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P 4 | 41 | 25 | + | 96 | 54 | + | 96 |
| 01 | 3 | 34 | 30 | P 5 | 51 | 55 | P 4 | 41 |
| 02 | : | 36 | 31 | F 2 | 22 | 60 | В/О | 48 |
| 03 | P 5 | 51 | 32 | ↑ | 06 | Инструкция | | |
| 04 | P 6 | 61 | 33 | F 3 | 32 | | | |
| 05 | С/П | 78 | 34 | + | 96 | h/2 | P 2 | |
| 10 | ПП | 68 | 35 | P 3 | 31 | $x_0$ | P 3 | |
| 11 | P4 | 41 | 40 | ПП | 68 | $3y_0$ | В/О С/П С/П С/П... | |
| 12 | ПП | 68 | 41 | F 6 | 62 | Результат | | |
| 13 | F 3 | 32 | 42 | ↑ | 06 | $y_0, y_1, y_2, \ldots$ | | |
| 14 | + | 96 | 43 | F 2 | 22 | | | |
| 15 | P 4 | 41 | 44 | × | 26 | Регистры | | |
| 20 | ПП | 68 | 45 | ↑ | 06 | | | |
| 21 | P 4 | 41 | 50 | F 6 | 62 | 2 | h/2 | |
| 22 | + | 96 | 51 | + | 96 | 3 | $x_0$ | |
| 23 | P 4 | 41 | 52 | P 5 | 51 | 4 | $3y_1$ | |
| 24 | F 5 | 52 | 53 | F 4 | 42 | 5; 6 | $y_1$ | |

Очередное значение $y_1$ вычисляется за $(13 + \tau_f)$ с, где $\tau_f$ — время вычисления f (x, y).

Программа III.4.1.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 4 | 44 | 17 | П→x 5 | 65 | 34 | + | 10 |
| 01 | 3 | 03 | 18 | + | 10 | 35 | x→П 4 | 44 |
| 02 | : | 13 | 19 | x→П 5 | 45 | 36 | В/О | 52 |
| 03 | x→П 5 | 45 | 20 | П→x 2 | 62 | | | |
| 04 | x→П 6 | 46 | 21 | П→x 3 | 63 | | Инструкция | |
| 05 | С/П | 50 | 22 | + | 10 | | h/2 x→П 2 | |
| 06 | ПП | 53 | 23 | x→П 3 | 43 | | $x_0$ x→П 3 | |
| 07 | 24 | 24 | 24 | ПП | 53 | | $3y_0$ В/О С/П С/П С/П... | |
| 08 | ПП | 53 | 25 | 37 | 37 | | ↑Результат | |
| 09 | 20 | 20 | 26 | П→x 2 | 62 | | $y_0$, $y_1$, $y_2$, ... | |
| 10 | ПП | 53 | 27 | × | 12 | | | |
| 11 | 33 | 33 | 28 | П→x 6 | 66 | | Регистры | |
| 12 | ПП | 53 | 29 | ←→ | 14 | 2 | | h/2 |
| 13 | 24 | 24 | 30 | + | 10 | 3 | | $x_1$ |
| 14 | ПП | 53 | 31 | x→П 5 | 45 | 4 | | $3y_1$ |
| 15 | 33 | 33 | 32 | П→x 4 | 64 | 5; 6 | | $y_1$ |
| 16 | F Bx | 0 | 33 | F Bx | 0 | | | |

Очередное значение $y_1$ вычисляется за $(22 + \tau_f)$ с, где $\tau_f$ — время вычисления f (x, y).

*Пример.* Решить дифференциальное уравнение $y' = ye^{-x}$ при начальных значениях $x_0 = 0$, $y_0 = 1$. Шаг h = 0,5.

Подпрограмма имеет вид:

а) для программы III.4.1.2/21 F 5 ↑ F 3 P $e^x$: В/О

б) для программы III.4.1.2/54, 52 П→ x5 П → x 3 F $e^x$ : В/О

Таблица результатов

| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0 | 0,5 | 1,0 | 1,5 | 2,0 | 2,5 |
| $y_1$ | 1 | 1,4820 | 1,8814 | 2,1745 | 2,3740 | 2,5038 |
| $y_{точн}$ | 1 | 1,4821 | 1,8816 | 2,1747 | 2,3742 | 2,5041 |

## III.4.2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

$$\begin{cases} y' = f(x, y, \ldots, v), \\ z' = g(x, y, \ldots, v), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ v' = r(x, y, \ldots, v). \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z), \\ z' = g(x, y, z). \end{cases}$$

### III.4.2.1.1. Решение методом Рунге-Кутта второго порядка

Подпрограмма вычисления функций f и g располагается в ячейках памяти непосредственно за основной программой и заканчивается командой В/О.

При вычислении по программе III.4.2.1.1/21 аргументы для вычисления f и g берутся: $x_1$ — из регистра 4, $y_1$ — из регистра 5, $z_1$ — — из регистра 2. Порядок вычисления f и g следующий: вначале вычисляется значение g и командой Р /—/ (код 53) заносится в регистр S 6, затем вычисляется f и помещается в регистре X.

Программа III.4.2.1.1/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | Р 3 | 31 | 30 | ↑ | 06 | 60 | Р 2 | 21 |
| 01 | F 6 | 62 | 31 | F 7 | 72 | 61 | В/О | 48 |
| 02 | Р 5 | 51 | 32 | × | 26 | | | |
| 03 | F 3 | 32 | 33 | ↑ | 06 | Инструкция | | |
| 04 | Р 2 | 21 | 34 | F 6 | 62 | h/2 | Р 7 | |
| 05 | F 4 | 42 | 35 | + | 96 | $x_0$ | Р 4 | |
| 10 | С/П | 78 | 40 | Р 6 | 61 | $y_0$ | Р 6 | |
| 11 | ПП | 68 | 41 | + | 96 | $Z_0$ В/О С/П С/П С/П... | | |
| 12 | F x | 25 | 42 | Р 5 | 51 | Результат | | |
| 13 | F 7 | 72 | 43 | Р , | 43 | $x_0, x_1, x_2, \ldots$ | | |
| 14 | 2 | 24 | 44 | ↑ | 06 | | | |
| 15 | × | 26 | 45 | F 7 | 72 | Регистры | | |
| 20 | ↑ | 06 | 50 | × | 26 | | | |
| 21 | F 4 | 42 | 51 | ↑ | 06 | 2; 3 $z_1$ | | |
| 22 | + | 96 | 52 | F 3 | 32 | 4 $x_1$ | | |
| 23 | Р 4 | 41 | 53 | + | 96 | 5; 6 $y_1$ | | |
| 24 | ПП | 68 | 54 | Р 3 | 31 | 7 h/2 | | |
| 25 | Р ВП | 63 | 55 | + | 96 | S6 g | | |

Очередные значения $y_1$ и $z_1$ вычисляются за $(13 + \tau_f g)$ с, где $\tau_f g$ — время вычисления f и g, и командами F 6 и F 3 соответственно могут быть выведены на индикатор.

При вычислении по программе III.4.2.1.1/54 и III.4.2.1.1/52 аргументы для вычисления f и g берутся: $x_1$ — из регистра 1, $y_1$ — из регистра 5 и $z_1$ — из регистра 2. Порядок вычисления f и g следующий: вначале вычисляется g (x, y, z) и заносится в регистр 4, затем вычисляется f (x, y, z) и оставляется в регистре X.

Программа III.4.2.1.1/54

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 3 | 43 | 15 | x→П 0 | 40 |
| 01 | П→x 6 | 66 | 16 | ПП | 53 |
| 02 | x→П 5 | 45 | 17 | 30 | 30 |
| 03 | П→x 3 | 63 | 18 | П→x Д | 6Г |
| 04 | x→П 2 | 42 | 19 | × | 12 |
| 05 | П→x 1 | 61 | 20 | B↑ | 0E |
| 06 | С/П | 50 | 21 | К П→x B↑ | ГЕ |
| 07 | ПП | 53 | 22 | + | 10 |
| 08 | 14 | 14 | 23 | К x→П B↑ | LE |
| 09 | П→x Д | 6Г | 24 | + | 10 |
| 10 | 2 | 02 | 25 | К x→П 0 | L0 |
| 11 | × | 12 | 26 | К П→x 0 | Г0 |
| 12 | + | 10 | 27 | F L0 | 5Г |
| 13 | x→П 1 | 41 | 28 | 18 | 18 |
| 14 | 6 | 06 | 29 | В/О | 52 |

Инструкция

| | |
|---|---|
| h/2 | x→П Д |
| $x_0$ | x→П 1 |
| $y_0$ | x→П 6 |

$z_0$ В/О С/П С/П С/П...

Результат

$x_0, x_1, x_2, \ldots$

Регистры

| | |
|---|---|
| 0 | счетчик |
| 1 | $x_1$ |
| 2;3 | $z_1$ |
| 4 | g |
| 5;6 | $y_1$ |
| Д | h/2 |

Программа III.4.2.1.1/52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 3 | 43 | 18 | 35 | 35 |
| 01 | П→x 6 | 66 | 19 | П→x Д | 6Г |
| 02 | x→П 5 | 45 | 20 | × | 12 |
| 03 | П→x 3 | 63 | 21 | B↑ | 0E |
| 04 | x→П 2 | 42 | 22 | К П→x E | ГЕ |
| 05 | П→x 1 | 61 | 23 | + | 10 |
| 06 | С/П | 50 | 24 | К x→П E | LE |
| 07 | ПП | 53 | 25 | + | 10 |
| 08 | 14 | 14 | 26 | К x→П0 | L0 |
| 09 | П→x Д | 6Г | 27 | П→x E | 6E |
| 10 | 2 | 02 | 28 | 3 | 03 |
| 11 | × | 12 | 29 | — | 11 |
| 12 | + | 10 | 30 | x→П E | 4E |
| 13 | x→П 1 | 41 | 31 | К П→x 0 | Г0 |
| 14 | 6 | 06 | 32 | F L0 | 5Г |
| 15 | x→П 0 | 40 | 33 | 19 | 19 |
| 16 | x→П E | 4E | 34 | В/О | 52 |
| 17 | ПП | 53 | | | |

Инструкция

| | |
|---|---|
| h/2 | x→П Д |
| $x_0$ | x→П 1 |
| $y_0$ | x→П 6 |

$z_0$ В/О С/П С/П С/П...

Результат

$x_0, x_1, x_2, \ldots$.

Регистры

| | |
|---|---|
| 0,E | счетчики |
| 1 | $x_1$ |
| 2;3 | $z_1$ |
| 4 | g |
| 5;6 | $y_1$ |
| Д | h/2 |

Очередные значения $y_1$ и $z_1$ вычисляются за $(22 + \tau_{fg})$ с, где $\tau_{fg}$ — время вычисления f (x, y, z) и g (x, y, z), и командами П → x6 и П → x3 соответственно могут быть выведены на индикатор.

*Пример.* Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y' = xy + z, \\ z' = x + yz \end{cases}$$

при начальных значениях $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $z_0 = 1$. Шаг h = 0,05.

Подпрограмма вычисления f и g имеет вид:

а) для программы III.4.2.1.1/21

F 5 ↑ F 2× ↑ F 4 + P/—/ F 4 ↑ F 5× ↑ F 2 + В/О

б) для программ III.4.2.1.1/54 и III.4.2.1.1/52

П→ x 1 П→ x 5 П→ x 2 × + x→ П 4 П→ x 1 П→ x 5 × × П→ x 2 + В/О

Таблица результатов

| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1 | 1,05 | 1,10 | 1,15 | 1,20 | 1,25 |
| $y_i$ | 1 | 1,1064 | 1,2271 | 1,3645 | 1,5213 | 1,7006 |
| $y_{точн}$ | 1 | 1,1066 | 1,2275 | 1,3653 | 1,5224 | 1,7024 |
| $z_i$ | 1 | 1,1065 | 1,2281 | 1,3680 | 1,5308 | 1,7224 |
| $z_{точн}$ | 1 | 1,1067 | 1,2284 | 1,3687 | 1,5320 | 1,7243 |

### III.4.2.1.2. Решение методом Рунге-Кутта четвертого порядка

Подпрограмма вычисления значений функций f и g располагается в ячейках памяти, начиная с адреса 55, и может использовать регистры 0,1, 2, E. Аргументы берутся: $x_1$ — из регистра 6, $y_1$ — из регистра A, $z_1$ — из регистра B. Вначале вычисляется g (x, y, z) и заносится в регистр 3, а затем вычисляется f (x, y, z) и оставляется в регистре X.

Программа III.4.2.1.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П Д | 4Г | 25 | П→x 7 | 67 | 50 | П→x C | 6C |
| 01 | 3 | 03 | 26 | + | 10 | 51 | П→x 5 | 65 |
| 02 | : | 13 | 27 | x→П 6 | 46 | 52 | + | 10 |
| 03 | x→П 8 | 48 | 28 | ПП | 53 | 53 | x→П C | 4C |
| 04 | x↔П A | 4— | 29 | 55 | 55 | 54 | В/О | 52 |
| 05 | П→x Д | 6Г | 30 | П→x 7 | 67 | | | |
| 06 | 3 | 03 | 31 | × | 12 | | Инструкция | |
| 07 | : | 13 | 32 | x→П 5 | 45 | | h/2 x→П 7 | |
| 08 | x→П 9 | 49 | 33 | П→x 3 | 63 | | $x_0$ x→П 6 | |
| 09 | x→П B | 4L | 34 | П→x 7 | 67 | | $3y_0$ x→П C | |
| 10 | П→x 6 | 66 | 35 | × | 12 | $3z_0$ | В/О С/П С/П С/П... | |
| 11 | С/П | 50 | 36 | x→П 4 | 44 | | | |
| 12 | ПП | 53 | 37 | П→x 9 | 69 | | Результат | |
| 13 | 28 | 28 | 38 | П→x 8 | 68 | | $x_0$, $x_1$, $x_2$, ... | |
| 14 | ПП | 53 | 39 | П→x 5 | 65 | | | |
| 15 | 24 | 24 | 40 | + | 10 | | Регистры | |
| 16 | ПП | 53 | 41 | x→П A | 4— | | 3 g | |
| 17 | 46 | 46 | 42 | ←→ | 14 | | 4 gh/2 | |
| 18 | ПП | 53 | 43 | П→x 4 | 64 | | 5 fh/2 | |
| 19 | 28 | 28 | 44 | + | 10 | | 6 $x_1$ | |

*Продолжение*

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 | П→x B | 6L | 45 | x→П B | 4L |
| 21 | П→x A | 6— | 46 | П→x Д | 6Г |
| 22 | ПП | 53 | 47 | П→x 4 | 64 |
| 23 | 39 | 39 | 48 | + | 10 |
| 24 | П→x 6 | 66 | 49 | x→П Д | 4Г |

Регистры
7 h/2
8, A $y_1$
9, B $z_1$
C $3y_1$
Д $3z_1$

Очередные значения $y_1$ и $z_1$ вычисляются за $(48 + \tau_{fg})$ с, где $\tau_{fg}$ — время вычисления f (x, y, z) и g (x, y, z), и командами П → x 8 и П → x 9 соответственно могут быть выведены на индикатор.

*Пример.* Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y' = xy + z, \\ z' = x + yz \end{cases}$$

при начальных значениях $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $z_0 = 1$. Шаг h = 0,1.

Подпрограмма вычисления f и g имеет вид:

П → x 6 П → x A П → x B × + x → П 3 П → x 6 П → x A × П → x B + B/O

Таблица результатов

| x | 1 | 1,1 | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| y | 1 | 1,22754 | 1,52241 | 1,90912 | 2,42456 | 3,12741 |
| $y_{точн}$ | 1 | 1,22755 | 1,52243 | 1,90915 | 2,42463 | 3,12759 |
| z | 1 | 1,22844 | 1,53202 | 1,95373 | 2,57444 | 3,55937 |
| $z_{точн}$ | 1 | 1,22843 | 1,53201 | 1,95373 | 2,57445 | 3,55945 |

### III.4.2.2. СИСТЕМА ТРЕХ УРАВНЕНИЙ

Система уравнений

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z, t), \\ z' = g(x, y, z, t), \\ t' = p(x, y, z, t) \end{cases}$$

решается методом Рунге-Кутта второго порядка.

Подпрограмма вычисления значений функций f, g и p располагается в ячейках памяти непосредственно за основной программой и заканчивается командой B/O. Аргументы для вычисления f и g берутся: $x_1$ — из регистра 1, $y_1$ — из регистра 8, $z_1$ — из регистра 5, $t_1$ — из регистра 2. Порядок вычисления f и g следующий: вначале вычисляется g и заносится в регистр 7, затем p и заносится в регистр 4 и, наконец, f и оставляется в регистре X.

В подпрограммах могут быть использованы регистры памяти:

а) для программы III.4.2.2/54 A, B, C, а также 4; 7 в качестве оперативных;

б) для программы III.4.2.2/52 A, B, E, а также 4; 7 в качестве оперативных.

На каждом шаге вычисления значения $y_1$, $z_1$ и $t_1$ могут быть выведены на индикатор командами П → x 9, П → x 6 и П → x 3 соответственно.

Программа III.4.2.2/54

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 3 | 43 | 16 | 9 | 09 |
| 01 | П→x 9 | 69 | 17 | x→П 0 | 40 |
| 02 | x→П 8 | 48 | 18 | ПП | 53 |
| 03 | П→x 6 | 66 | 19 | 32 | 32 |
| 04 | x→П 5 | 45 | 20 | П→x Д | 6Г |
| 05 | П→x 3 | 63 | 21 | × | 12 |
| 06 | x→П 2 | 42 | 22 | В↑ | 0E |
| 07 | П→x 1 | 61 | 23 | К П→x В↑ | ГЕ |
| 08 | С/П | 50 | 24 | + | 10 |
| 09 | ПП | 53 | 25 | К x→П В↑ | LE |
| 10 | 16 | 16 | 26 | + | 10 |
| 11 | П→x Д | 6Г | 27 | К x→П 0 | L0 |
| 12 | 2 | 02 | 28 | К П→x 0 | Г0 |
| 13 | × | 12 | 29 | F L0 | 5Г |
| 14 | + | 10 | 30 | 20 | 20 |
| 15 | x→П 1 | 41 | 31 | В/О | 52 |

Инструкция

h/2 x→П Д
$x_0$ x→П 1
$y_0$ x→П 9
$z_0$ x→П 6
$t_0$ В/О С/П С/П С/П...

Результат

$x_0$, $x_1$, $x_2$,...

Регистры

| | |
|---|---|
| 0 | счетчик |
| 1 | $x_1$ |
| 2;3 | $t_1$ |
| 4 | p |
| 5;6 | $z_1$ |
| 7 | g |
| 8;9 | $y_1$ |
| Д | h/2 |

Программа III.4.2.2/52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 3 | 43 | 19 | ПП | 53 |
| 01 | П→x 9 | 69 | 20 | 37 | 37 |
| 02 | x→П 8 | 48 | 21 | П→x Д | 6Г |
| 03 | П→x 6 | 66 | 22 | × | 12 |
| 04 | x→П 5 | 45 | 23 | В↑ | 0E |
| 05 | П→x 3 | 63 | 24 | К П→x С | ГС |
| 06 | x→П 2 | 42 | 25 | + | 10 |
| 07 | П→x 1 | 61 | 26 | К x→П С | LC |
| 08 | С/П | 50 | 27 | + | 10 |
| 09 | ПП | 53 | 28 | К x→П 0 | L0 |
| 10 | 16 | 16 | 29 | П→x С | 6С |
| 11 | П→x Д | 6Г | 30 | 3 | 03 |
| 12 | 2 | 02 | 31 | — | 11 |
| 13 | × | 12 | 32 | x→П С | 4С |
| 14 | + | 10 | 33 | К П→x 0 | Г0 |
| 15 | x→П 1 | 41 | 34 | F L0 | 5Г |
| 16 | 9 | 09 | 35 | 21 | 21 |
| 17 | x→П 0 | 40 | 36 | В/О | 52 |
| 18 | x→П С | 4С | | | |

Инструкция

h/2 x→П Д
$x_0$ x→П 1
$y_0$ x→П 9
$z_0$ x→П 6
$t_0$ В/О С/П С/П С/П...

Результат

$x_0$, $x_1$, $x_2$, ...

Регистры

| | |
|---|---|
| 0,С | счетчики |
| 1 | $x_1$ |
| 2;3 | $t_1$ |
| 4 | p |
| 5;6 | $z_1$ |
| 7 | g |
| 8;9 | $y_1$ |
| Д | h/2 |

Очередные значения неизвестных y, z и t вычисляются за $(32+\tau_{f,g,p})$ с; где $\tau_{f,g,p}$ — время вычисления f (x, y, z, t), g (x, y, z) и p (x, y, z).

*Пример.* Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y' = x(z+t)+y, \\ z' = t(x+y)+z, \\ t' = y(z+t)+x \end{cases}$$

при начальных значениях $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $z_0 = 1$, $t_0 = 1$. Шаг $h = 0{,}02$.

Подпрограмма имеет вид:

П → x 2 П → x 1 П → x 8 + × П → x 5 + x → П 7 П → x 8 П → x 5 П → x 2 + × П → x 1 + x → П 4 П → x 1 П → x 5 П → x 2 + × П → x 8 + В/О

Таблица результатов

| i | $x_1$ | $y_1$ | $y_{точн}$ | $z_1$ | $z_{точн}$ | $i_1$ | $i_{точн}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1,00 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 1 | 1,02 | 1,0622 | 1,0623 | 1,0626 | 1,0627 | 1,0627 | 1,0627 |
| 2 | 1,04 | 1,1293 | 1,1293 | 1,1311 | 1,1312 | 1,1313 | 1,1314 |
| ... | .... | .... | .... | .... | .... | .... | .... |
| 5 | 1,10 | 1,3642 | 1,3645 | 1,3797 | 1,3801 | 1,3821 | 1,3825 |

### III.4.2.3. СИСТЕМА ЧЕТЫРЕХ УРАВНЕНИЙ

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z, t, v), \\ z' = g(x, y, z, t, v), \\ t' = p(x, y, z, t, v), \\ v' = r(x, y, z, t, v) \end{cases}$$

решается методом Рунге-Кутта второго порядка.

Подпрограмма вычисления значений функций f, g, p и r располагается в ячейках памяти непосредственно за основной программой и может использовать в качестве оперативных регистры памяти 4, 7 и A. Полностью свободных регистров памяти не имеется. Аргументы для вычисления f, g, p, и r берутся: $x_1$ — из регистра 1, $y_1$ — из регистра B, $z_1$ — из регистра 8, $t_1$ — из регистра 5, $v_1$ — из регистра 2. Вначале вычисляется g, результат — в регистр A, затем p, результат — в регистр 7, затем r, результат — в регистр 4, наконец, f, результат оставляется в регистре X.

Программа III.4.2.3/54

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 3 | 43 | 18 | 1 | 01 |
| 01 | П→x C | 6C | 19 | 2 | 02 |
| 02 | x→П B | 4L | 20 | x→П 0 | 40 |
| 03 | П→x 9 | 69 | 21 | ПП | 53 |
| 04 | x→П 8 | 48 | 22 | 35 | 35 |
| 05 | П→x 6 | 66 | 23 | П→x Д | 6Г |
| 06 | x→П 5 | 45 | 24 | × | 12 |
| 07 | П→x 3 | 63 | 25 | B↑ | 0E |
| 08 | x→П 2 | 42 | 26 | K П→x B↑ | ГЕ |
| 09 | П→x 1 | 61 | 27 | + | 10 |
| 10 | С/П | 50 | 28 | K x→П B↑ | LE |
| 11 | ПП | 53 | 29 | + | 10 |
| 12 | 18 | 18 | 30 | K x→П 0 | L0 |
| 13 | П→x Д | 6Г | 31 | K П→x 0 | Г0 |
| 14 | 2 | 02 | 32 | F L0 | 5Г |
| 15 | × | 12 | 33 | 23 | 23 |
| 16 | + | 10 | 34 | B/O | 52 |
| 17 | x→П 1 | 41 | | | |

Инструкция

h/2 x→П Д
$x_0$ x→П 1
$y_0$ x→П C
$z_0$ x→П 9
$t_0$ x→П 6
$v_0$ B/O С/П С/П С/П...

Результат

$x_0$, $x_1$, $x_2$, ...

Регистры

| | |
|---|---|
| 0, E | счетчик |
| 1 | $x_1$ |
| 2;3 | $v_1$ |
| 4 | r |
| 5;6 | $t_1$ |
| 7 | p |
| 8;9 | $z_1$ |
| A | g |
| B;C | $y_1$ |
| Д | h/2 |

Программа III.4.2.3/52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 3 | 43 | 20 | x→П 0 | 40 |
| 01 | П→x C | 6C | 21 | x→П E | 4E |
| 02 | x→П B | 4L | 22 | ПП | 53 |
| 03 | П→x 9 | 69 | 23 | 40 | 40 |
| 04 | x→П 8 | 48 | 24 | П→x Д | 6Г |
| 05 | П→x 6 | 66 | 25 | × | 12 |
| 06 | x→П 5 | 45 | 26 | B↑ | 0E |
| 07 | П→x 3 | 63 | 27 | K П→x E | ГЕ |
| 08 | x→П 2 | 42 | 28 | + | 10 |
| 09 | П→x 1 | 61 | 29 | K x→ ПЕ | LE |
| 10 | С/П | 50 | 30 | + | 10 |
| 11 | ПП | 53 | 31 | K x→П 0 | L0 |
| 12 | 18 | 18 | 32 | П→x E | 6E |
| 13 | П→x Д | 6Г | 33 | 3 | 03 |
| 14 | 2 | 02 | 34 | — | 11 |
| 15 | × | 12 | 35 | x→П E | 4E |
| 16 | + | 10 | 36 | K П→x 0 | Г0 |
| 17 | x→П 1 | 41 | 37 | F L0 | 5Г |
| 18 | 1 | 01 | 38 | 24 | 24 |
| 19 | 2 | 02 | 39 | B/O | 52 |

Инструкция

h/2 x→П Д
$x_0$ x→П 1
$y_0$ x→П C
$z_0$ x→ П 9
$t_0$ x→П 6
$v_0$ B/O С/П С/П С/П...

Результат

$x_0$, $x_1$, $x_2$, ...

Регистры

| | |
|---|---|
| 0,E | счетчики |
| 1 | $x_1$ |
| 2;3 | $v_1$ |
| 4 | r |
| 5;6 | $t_1$ |
| 7 | p |
| 8;9 | $z_1$ |
| A | g |
| B;C | $y_1$ |
| Д | h/2 |

Очередные значения неизвестных y, z, t и v вычисляются за $(40 + \tau_\varepsilon)$ с, где $\tau_\varepsilon$ — время вычисления f, g, p и r, и командами П → x C, П → x 9, П → x 6 и П → x 3 соответственно могут быть выведены на индикатор.

*Пример.*

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y' = x + y + v, \\ z' = yz + 2, \\ t' = z + t, \\ v' = tv \end{cases}$$

при начальных значениях $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $z_0 = 1$, $t_0 = 1$, $v_0 = 1$. Шаг $h = 0{,}04$.

Подпрограмма имеет вид:

П → x B П → x 8 × 2 + x → П A П → x 8 П → x 5 + x → П 7
П → x 5 П → x 2 × x → П 4 П → x 1 П → x B + П → x 2 + B/O

Таблица результатов

| i | $x_1$ | $y_1$ | $z_1$ | $t_1$ | $v_1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1,00 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 | 1,0000 |
| 1 | 1,04 | 1,1240 | 1,1251 | 1,0840 | 1,0425 |
| 2 | 1,08 | 1,2565 | 1,2618 | 1,1767 | 1,0906 |
| 3 | 1,12 | 1,3982 | 1,4127 | 1,2791 | 1,1453 |
| 4 | 1,16 | 1,5496 | 1,5808 | 1,3921 | 1,2080 |

При x = 1,16 ошибки составляют:
$\delta_y = 0{,}0005$; $\delta_z = 0{,}0003$; $\delta_t = 0{,}0007$; $\delta_v = 0{,}0005$.

### III.4.3. УРАВНЕНИЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

$$y^{(m)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(m-1)}).$$

#### III.4.3.1. УРАВНЕНИЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

$$y'' = f(x, y, y').$$

#### III.4.3.1.1. Решения методом Рунге-Кутта второго порядка

При вычислении по программе III.4.3.1.1/21 подпрограмма вычисления значений функции f (x, y, y′) располагается в ячейках памяти, начиная с адреса 64 и может использовать регистры 8, S1 — S5. Аргументы берутся: $x_i$ — из регистра 6, $y_i$ — из регистра 4, $y_i'$ — из регистра 2, ответ оставляется в регистре X.

Программа III.4.3.1.1/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | Р 3 | 31 | 30 | ↑ | 06 | 60 | Р 2 | 21 |
| 01 | F 3 | 32 | 31 | F 7 | 72 | 61 | В/О | 48 |
| 02 | Р 2 | 21 | 32 | × | 26 | | | |
| 03 | F 5 | 52 | 33 | ↑ | 06 | | | |
| 04 | Р 4 | 41 | 34 | F 5 | 52 | | | |
| 05 | С/П | 78 | 35 | + | 96 | | | |
| 10 | ПП | 68 | 40 | Р 5 | 51 | | | |
| 11 | Р× | 23 | 41 | + | 96 | | | |
| 12 | F 7 | 72 | 42 | Р 4 | 41 | | | |
| 13 | ↑ | 06 | 43 | Р . | 43 | | | |
| 14 | F 6 | 62 | 44 | ↑ | 06 | | | |
| 15 | + | 96 | 45 | F 7 | 72 | | | |
| 20 | + | 96 | 50 | × | 26 | | | |
| 21 | Р 6 | 61 | 51 | ↑ | 06 | | | |
| 22 | ПП | 68 | 52 | F 3 | 32 | | | |
| 23 | Р ВП | 63 | 53 | + | 96 | | | |
| 24 | Р /—/ | 53 | 54 | Р 3 | 31 | | | |
| 25 | F 2 | 22 | 55 | + | 96 | | | |

Инструкция

| | |
|---|---|
| h/2 | Р 7 |
| $x_0$ | Р 6 |
| $y_0$ | Р 5 |

$y'_0$ В/О С/П С/П С/П...

Результат

$y_0, y_1, y_2, \ldots$

Регистры

| | |
|---|---|
| 2;3 | $y'_i$ |
| 4;5 | $y_1$ |
| 6 | $x_1$ |
| 7 | h/2 |
| S6 | f |

Время вычисления очередного значения $y_1$ — $(10 + \tau_f)$ с, где $\tau_f$ — время вычисления f (x, y, y′).

При вычислении по программе III.4.3.1.1/54, 52 подпрограмма вычисления значений функции f (x, y, y′) располагается в ячейках памяти, начиная с адреса 34, и может использовать регистры 8 — Д (Е). Аргументы берутся: $x_1$ — из регистра 6, $y_1$ — из регистра 4, $y'_i$ — из регистра 2, ответ оставляется в регистре X.

Программа III.4.3.1.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 3 | 43 | 17 | ПП | 53 |
| 01 | П→x 3 | 63 | 18 | 34 | 34 |
| 02 | x→П 2 | 42 | 19 | П→x 2 | 62 |
| 03 | П→x 5 | 65 | 20 | ПП | 53 |
| 04 | x→П 4 | 44 | 21 | 22 | 22 |
| 05 | С/П | 50 | 22 | П→x 7 | 67 |
| 06 | ПП | 53 | 23 | × | 12 |
| 07 | 14 | 14 | 24 | В↑ | 0Е |
| 08 | П→x 6 | 66 | 25 | К П→x 0 | Г0 |
| 09 | П→x 7 | 67 | 26 | + | 10 |
| 10 | 2 | 02 | 27 | К x→П 1 | L1 |
| 11 | × | 12 | 28 | + | 10 |
| 12 | + | 10 | 29 | К x→П 0 | L0 |
| 13 | x→П 6 | 46 | 30 | F L1 | 5L |
| 14 | 6 | 06 | 31 | 32 | 32 |
| 15 | x→П 0 | 40 | 32 | ←→ | 14 |
| 16 | x→П 1 | 41 | 33 | В/О | 52 |

Инструкция

| | |
|---|---|
| h/2 | x→П 7 |
| $x_0$ | x→П 6 |
| $y_0$ | x→П 5 |

$y'_0$ В/О С/П С/П С/П...

Результат

$y_0, y_1, y_2, \ldots$

Регистры

| | |
|---|---|
| 0;1 | счетчики |
| 2;3 | $y'_i$ |
| 4;5 | $y_1$ |
| 6 | $x_1$ |
| 7 | h/2 |

Время вычисления очередного значения $y_1$ — $(20 + \tau_f)$ с, где $\tau_f$ — время вычисления f (x, y, y′).

*Пример*. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' = \frac{3}{4}\left(\frac{xy'}{\sqrt{y}} + 1\right)$$

при $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $y'_0 = 1$. Шаг h = 0,05.

Подпрограммы вычисления f (x, y, y′) имеют вид:

а) для программы III. 4.3. 1.1/21

F 6 ↑ F 2 × ↑ F 4 F $\sqrt{}$ : 1 + 3×4 : В/О

б) для программы III. 4.3.1.1/54, 52

П → x 6 П → x 2×П→ x 4 F $\sqrt{}$ : 1 + 3×4: В/О

Таблица результатов

| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1,00 | 1,05 | 1,10 | 1,15 | 1,20 | 1,25 |
| $y_i$ | 1,00000 | 1,05188 | 1,10769 | 1,16765 | 1,23196 | 1,30085 |
| $y_{точн}$ | 1,00000 | 1,05191 | 1,10776 | 1,16775 | 1,23210 | 1,30103 |

### III.4.3.1.2. Решение методом Рунге-Кутта четвертого порядка

Подпрограмма вычисления f (x, y, y′) располагается в ячейках памяти, начиная с адреса 54, и может использовать регистры 0—3 (и E). Аргументы берутся: $x_i$ — из регистра 6, $y_i$ — из регистра A, $y'_i$ — из регистра B. Ответ f оставляется в регистре X.

Программа III.4.3.1.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П Д | 4Г | 24 | П→x 7 | 67 | 48 | x→П C | 4C |
| 01 | 3 | 03 | 25 | + | 10 | 49 | П→x Д | 6Г |
| 02 | : | 13 | 26 | x→П 6 | 46 | 50 | П→x 4 | 64 |
| 03 | x→П 9 | 49 | 27 | ПП | 53 | 51 | + | 10 |
| 04 | x→П B | 4L | 28 | 54 | 54 | 52 | x→П Д | 4Г |
| 05 | П→x C | 6C | 29 | П→x 7 | 67 | 53 | В/О | 52 |
| 06 | 3 | 03 | 30 | × | 12 | | | |
| 07 | : | 13 | 31 | x→П 4 | 44 | | Инструкция | |
| 08 | x→П 8 | 48 | 32 | П→x B | 6L | h/2 | x→П 7 | |
| 09 | x→П A | 4— | 33 | П→x 7 | 67 | $x_0$ | x→П 6 | |
| 10 | С/П | 50 | 34 | × | 12 | $3y_0$ | x→П C | |
| 11 | ПП | 53 | 35 | x→П 5 | 45 | $3y'_0$ | В/О С/П С/П С/П... | |
| 12 | 27 | 27 | 36 | П→x 9 | 69 | | Результат | |
| 13 | ПП | 53 | 37 | П→x 8 | 68 | | $y_0, y_1, y_2, \ldots$ | |
| 14 | 23 | 23 | 38 | П→x 5 | 65 | | Регистры | |
| 15 | ПП | 53 | 39 | + | 10 | 4 | fh/2 | |

*Продолжение*

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Регистры | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 45 | 45 | 40 | x→П A | 4— | 5 | y′h/2 |
| 17 | ПП | 53 | 41 | ←→ | 14 | 6 | $x_1$ |
| 18 | 27 | 27 | 42 | П→x 4 | 64 | 7 | h/2 |
| 19 | П→x B | 6L | 43 | + | 10 | 8,A | $y_1$ |
| 20 | П→x A | 6— | 44 | x→П B | 4L | 9,B | $y'_i$ |
| 21 | ПП | 53 | 45 | П→x C | 6C | C | $3y_1$ |
| 22 | 38 | 38 | 46 | П→x 5 | 65 | Д | $3y'_i$ |
| 23 | П→x 6 | 66 | 47 | + | 10 | | |

Очередные значения $y_1$ вычисляются за $(60 + 2\tau_f)$ с, где $\tau_f$ — время вычисления f (x, y, y′).

*Пример.* Решить дифференциальное уравнение

$$y'' = \frac{3}{4}\left(\frac{xy'}{\sqrt{y}} + 1\right)$$

при $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $y'_0 = 1$. Шаг $h = 0{,}1$.
Подпрограмма имеет вид:
П→ x 6 П→ x B×П→ x A F $\sqrt{\ }$ : 1 + 3×4 : B/O

Таблица результатов

| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 1 | 1,1 | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,5 |
| $y_1$ | 1 | 1,1077563 | 1,2321001 | 1,3747563 | 1,5376002 | 1,7226564 |
| Уточн | 1 | 1,1077562 | 1,2321000 | 1,3747562 | 1,5376000 | 1,7226562 |

### III.4.3.2. УРАВНЕНИЕ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Уравнение y′′′ = f (x, y, y′, y′′) решается методом Рунге-Кутта второго порядка.

Подпрограмма вычисления f (x, y, y′, y′′) располатается в ячейках памяти, начиная с адреса 39 и может использовать регистры А—Д (и Е). Аргументы берутся: $x_1$ — из регистра 8, $y_1$ — из регистра 6, $y'_i$ — из регистра 4, $y''_i$ — из регистра 2. Ответ оставляется в регистре X.

Программа III.4.3.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Инструкция | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 3 | 43 | 20 | 39 | 39 | h/2 | x→П 9 |
| 01 | П→x 3 | 63 | 21 | П→x 4 | 64 | $x_0$ | x→П 8 |
| 02 | x→П 2 | 42 | 22 | ПП | 53 | $y_0$ | x→П 7 |
| 03 | П→x 5 | 65 | 23 | 27 | 27 | $y'_0$ | x→П 5 |

*Продолжение*

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 04 | x→П 4 | 44 | 24 | П→x 2 | 62 |
| 05 | П→x 7 | 67 | 25 | ПП | 53 |
| 06 | x→П 6 | 46 | 26 | 27 | 27 |
| 07 | С/П | 50 | 27 | П→x 9 | 69 |
| 08 | ПП | 53 | 28 | × | 12 |
| 09 | 16 | 16 | 29 | В↑ | 0E |
| 10 | П→x 8 | 68 | 30 | К П→x 0 | Г0 |
| 11 | П→x 9 | 69 | 31 | + | 10 |
| 12 | 2 | 02 | 32 | К x→П 1 | L1 |
| 13 | × | 12 | 33 | + | 10 |
| 14 | + | 10 | 34 | К x→П 0 | L0 |
| 15 | x→П 8 | 48 | 35 | F L 1 | 5L |
| 16 | 8 | 08 | 36 | 37 | 37 |
| 17 | x→П 0 | 40 | 37 | ←→ | 14 |
| 18 | x→П 1 | 41 | 38 | В/О | 52 |
| 19 | ПП | 53 | | | |

$y''_0$ В/О С/П С/П С/П...

Результат

$y_0, y_1, y_2, \ldots$

Регистры

| | |
|---|---|
| 0;1 | счетчики |
| 2;3 | $y''$ |
| 4;5 | $y'_i$ |
| 6;7 | $y_1$ |
| 8 | $x_1$ |
| 9 | h/2 |

Очередные значения $y_1$ вычисляются за $(33 + \tau_f)$ с, где $\tau_f$ — время вычисления $f(x, y, y', y'')$.

*Пример.* Решить дифференциальное уравнение

$$y''' = \frac{xy}{(y')^2}\left(2y'' - \frac{3}{2}\right)$$

при $x_0 = 2$, $y_0 = 3{,}0625$, $y'_0 = 3{,}5$, $y''_0 = 3{,}75$. Шаг $h = 0{,}1$.

Подпрограмма имеет вид:

П→ x 8 П → x 6 × П → x 4 Fx²: П→ x 2 2 × 1 · 5 — × В/О

Таблица результатов

| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 2 | 2,1 | 2,2 | 2,3 | 2,4 | 2,5 |
| $y_1$ | 3,0625 | 3,4313 | 3,8405 | 4,2936 | 4,7938 | 5,3446 |
| $y_{точн}$ | 3,0625 | 3,4318 | 3,8416 | 4,2953 | 4,7961 | 5,3477 |

### III.4.3.3. УРАВНЕНИЕ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Уравнение $y^{(IV)} = f(x, y, y', y'', y''')$ решается методом Рунге-Кутта второго порядка. Подпрограмма вычисления $f(x, y, y', y'', y''')$ размещается в памяти машины, начиная с адреса 45. Она может использовать регистры С, Д (и Е). Аргументы берутся: $x_1$ — из регистра А, $y_1$ — из регистра 8, $y'_i$ — из регистра 6, $y''_i$ — из регистра 4, $y'''_i$ — из регистра 2. Ответ f оставляется в регистре Х.

Программа III.4.3.3/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 3 | 43 | 23 | 45 | 45 |
| 01 | П→x 3 | 63 | 24 | П→x 6 | 66 |
| 02 | x→П 2 | 42 | 25 | ПП | 53 |
| 03 | П→x 5 | 65 | 26 | 33 | 33 |
| 04 | x→П 4 | 44 | 27 | П→x 4 | 64 |
| 05 | П→x 7 | 67 | 28 | ПП | 53 |
| 06 | x→П 6 | 46 | 29 | 33 | 33 |
| 07 | П→x 9 | 69 | 30 | П→x 2 | 62 |
| 08 | x→П 8 | 48 | 31 | ПП | 53 |
| 09 | С/П | 50 | 32 | 33 | 33 |
| 10 | ПП | 53 | 33 | П→x B | 6L |
| 11 | 18 | 18 | 34 | × | 12 |
| 12 | П→x A | 6— | 35 | B↑ | 0E |
| 13 | П→x B | 6L | 36 | K П→x 0 | Г0 |
| 14 | 2 | 02 | 37 | + | 10 |
| 15 | × | 12 | 38 | K x→П 1 | L1 |
| 16 | + | 10 | 39 | + | 10 |
| 17 | x→П A | 4— | 40 | K x→П 0 | L0 |
| 18 | 1 | 01 | 41 | F L1 | 5L |
| 19 | 0 | 00 | 42 | 43 | 43 |
| 20 | x→П 0 | 40 | 43 | ←→ | 14 |
| 21 | x→П 1 | 41 | 44 | B/O | 52 |
| 22 | ПП | 53 | | | |

Инструкция

| | |
|---|---|
| h/2 | x→П B |
| $x_0$ | x→П A |
| $y_0$ | x→П 9 |
| $y'_0$ | x→П 7 |
| $y''_0$ | x→П 5 |

$y'''$ B/O С/П С/П С/П...

Результат

$y_0$, $y_1$, $y_2$, ...

Регистры

| | |
|---|---|
| 0;1 | счетчики |
| 2;3 | $y'''_i$ |
| 4;5 | $y''_i$ |
| 6;7 | $y'_i$ |
| 8;9 | $y_i$ |
| A | $x_i$ |
| B | h/2 |

Очередные значения $y_i$ вычисляются за $(42 + \tau_f)$ с, где $\tau_f$ — время вычисления f (x, y, y′, y″, y‴).

*Пример.* Решить дифференциальное уравнение

$$y^{(IV)} = (y''')^2 - xyy'y''$$

при $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $y'_0 = 1$, $y''_0 = 1$, $y'''_0 = 1$. Шаг $h = 0{,}1$.

Подпрограмма имеет вид:

П→ x 3 Fx² П→ x A П→ x 9 × П→ x 7 × П→ x 5 × — B/O

Таблица результатов

| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1 | 1,1 | 1,2 | 1,3 | 1,4 | 1,5 |
| $y_i$ | 1 | 1,1050 | 1,2210 | 1,3490 | 1,4898 | 1,6441 |
| Уточн | 1 | 1,1052 | 1,2213 | 1,3494 | 1,4902 | 1,6442 |

## III.4.3.4. УРАВНЕНИЕ ПЯТОГО ПОРЯДКА

Уравнение $y^{(V)} = f(x, y, y', y'', y''', y^{(IV)})$ решается методом Рунге-Кутта второго порядка. При вычислении по программе III.4.3.4/54 подпрограмма вычисления $f(x, y, y', y'', y''', y^{(IV)})$ размещается в ячейках памяти, начиная с адреса 45, и может использовать регистр Д. Аргументы берутся: $x_1$ — из регистра В, $y_1$ — из регистра 9, $y_i'$ — из регистра 7, $y_i''$ — из регистра 5, $y_i'''$ — из регистра 3, $y_i^{(IV)}$ — из регистра 1. Ответ f оставляется в регистре X.

Программа III.4.3.4/54

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 2 | 42 | 23 | П→x 7 | 67 |
| 01 | 1 | 01 | 24 | ПП | 53 |
| 02 | 0 | 00 | 25 | 35 | 35 |
| 03 | x→П 0 | 40 | 26 | П→x 5 | 65 |
| 04 | К П→x В↑ | ГЕ | 27 | ПП | 53 |
| 05 | К x→П 0 | L0 | 28 | 35 | 35 |
| 06 | F L0 | 5Г | 29 | П→x 3 | 63 |
| 07 | 04 | 04 | 30 | ПП | 53 |
| 08 | П→x A | 6— | 31 | 35 | 35 |
| 09 | С/П | 50 | 32 | П→x 1 | 61 |
| 10 | ПП | 53 | 33 | ПП | 53 |
| 11 | 18 | 18 | 34 | 35 | 35 |
| 12 | П→x B | 6L | 35 | П→x C | 6C |
| 13 | П→x C | 6C | 36 | × | 12 |
| 14 | 2 | 02 | 37 | В↑ | 0E |
| 15 | × | 12 | 38 | К П↑x 0 | Г0 |
| 16 | + | 10 | 39 | + | 10 |
| 17 | x→П B | 4L | 40 | К x→П В↑ | LE |
| 18 | 1 | 01 | 41 | + | 10 |
| 19 | 1 | 01 | 42 | К x→П 0 | L0 |
| 20 | x→П 0 | 40 | 43 | ←→ | 14 |
| 21 | ПП | 53 | 44 | В/О | 52 |
| 22 | 46 | 46 | | | |

Инструкция

h/2 x→П C
$x_0$ x→П B
$y_0$ x→П A
$y_0'$ x→П 8
$y_0''$ x→П 6
$y_0'''$ x→П 4
$y^{(IV)}$ В/О С/П С/П С/П...

Результат

$y_0, y_1, y_2, \ldots$

Регистры

0 счетчик
1; 2 $y_i^{(IV)}$
3; 4 $y_i'''$
5; 6 $y_i''$
7; 8 $y_i'$
9; A $y_i$
B $x_i$
C h/2

Очередные значения $y_i$ вычисляются за $(50 + \tau_f)$ с, где $\tau_f$ — время вычисления $f(x, y, y', y'', y''', y^{(IV)})$.

При вычислении по программе III.4.3.4/54,52 подпрограмма вычисления $f(x, y, y', y'', y''', y^{(IV)})$ размещается в ячейках памяти, начиная с адреса 50, и может использовать регистр Е. Аргументы берутся: $x_1$ — из регистра С, $y_1$ — из регистра А, $y_i'$ — из регистра 8, $y_i''$ — из регистра 6, $y_i'''$ — из регистра 4, $y_i^{(IV)}$ — из регистра 2. Ответ f оставляется в регистре X.

Программа III.4.3.4/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 3 | 43 | 25 | 50 | 50 |
| 01 | П→x 3 | 63 | 26 | П→x 8 | 68 |
| 02 | x→П 2 | 42 | 27 | ПП | 53 |
| 03 | П→x 5 | 65 | 28 | 38 | 38 |
| 04 | x→П 4 | 44 | 29 | П→x 6 | 66 |
| 05 | П→x 7 | 67 | 30 | ПП | 53 |
| 06 | x→П 6 | 46 | 31 | 38 | 38 |
| 07 | П→x 9 | 69 | 32 | П→x 4 | 64 |
| 08 | x→П 8 | 48 | 33 | ПП | 53 |
| 09 | П→x B | 6L | 34 | 38 | 38 |
| 10 | x→П A | 4— | 35 | П→x 2 | 62 |
| 11 | С/П | 50 | 36 | ПП | 53 |
| 12 | ПП | 53 | 37 | 38 | 38 |
| 13 | 20 | 20 | 38 | П→x Д | 6Г |
| 14 | П→x С | 6С | 39 | × | 12 |
| 15 | П→x Д | 6Г | 40 | В↑ | 0E |
| 16 | 2 | 02 | 41 | К П→x 0 | Г0 |
| 17 | × | 12 | 42 | + | 10 |
| 18 | + | 10 | 43 | К x→П 1 | L1 |
| 19 | x→П С | 4С | 44 | + | 10 |
| 20 | 1 | 01 | 45 | К x→П 0 | L0 |
| 21 | 2 | 02 | 46 | F L1 | 5L |
| 22 | x→П 0 | 40 | 47 | 48 | 48 |
| 23 | x→П 1 | 41 | 48 | ←→ | 14 |
| 24 | ПП | 53 | 49 | В/О | 52 |

Инструкция

h/2 x→П Д
$x_0$ x→П С
$y_0$ x→П В
$y'_0$ x→П 9
$y''_0$ x→П 7
$y'''_0$ x→П 5
$y^{(IV)}$ В/О С/П С/П С/П...

Результат

$y_0, y_1, y_2, \ldots$

Регистры

0; 1 счетчики
2; 3 $y_i^{(IV)}$
4; 5 $y_i'''$
6; 7 $y_i''$
8; 9 $y_i'$
A; B $y_i$
C $x_i$
Д h/2

Очередные значения $y_1$ вычисляются за $(56 + \tau_f)$ с, где $\tau_f$ — время вычисления $f(x, y, y', y'', y''', y^{(IV)})$.

*Пример.* Решить дифференциальное уравнение

$$y^{(V)} = 1{,}2\,y^{(IV)} + 13\,y''' + 2x\sqrt{y}$$

при $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $y'_0 = 1$, $y''_0 = 1$, $y'''_0 = 1$, $y_0^{(IV)} = 1$. Шаг $h = 0{,}05$.

Подпрограммы имеют вид:

для программы III.4.3.4/54

П→x 1 1 . 2 × П→x 3 1 3 × + П→x B П→x 9 F √ × 2 × + В/О

для программы III.4.3.4/54, 52

П→x 2 1 . 2 × П→x 4 1 3 × + П→x С П→x A F √ × 2 × + В/О

Таблица результатов

| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1 | 1,05 | 1,1 | 1,15 | 1,2 | 1,25 |
| $y_i$ | 1 | 1,05125 | 1,10513 | 1,16177 | 1,22133 | 1,28399 |
| $y_{точн}$ | 1 | 1,05127 | 1,10517 | 1,16184 | 1,22144 | 1,28415 |

# Глава IV

# СГЛАЖИВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ

При работе с числовыми данными часто возникает задача приближенного аналитического представления функции y (функция y может быть и случайной), заданной значениями в n узлах $x_1$, $y_1 = y(x_i', x_i'', \ldots, x_i^{(m)})$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Такими заданными в узлах значениями могут быть результаты экспериментальных исследований, таблицы и даже аналитические функции, использование которых связано с расчетными трудностями.

Целью аппроксимации является как получение наглядного (хотя и приближенного) аналитического представления о зависимости y от параметров $x^{(l)}$, $l = 1,2, \ldots, m$, так и оценка значения y в произвольной точке $\bar{x} = (x', x'', \ldots, x^{(m)})$. Поэтому аппроксимирующую функцию $f(\bar{x})$ следует выбирать по возможности более простой.

Для того чтобы $f(\bar{x}_1)$ была близка к $y_1$ в n узлах $\bar{x}_1$, в функцию $f(\bar{x}_1)$ вводят k ($k < n$) неопределенных параметров $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$, так что аппроксимирующая функция имеет общий вид $f(\bar{x}_1, a_1, a_2, \ldots, a_k)$, и затем тем или иным способом оптимизируют эти параметры.

Обычно в качестве меры различия f и y выбирают среднеквадратическую (или квадратическую) ошибку [13]

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [y_1 - f(\bar{x}_1, a_1, a_2, \ldots, a_k)]^2.$$

Дифференцируя $\sigma^2$ по параметрам $a_j$ ($j = 1,2, \ldots, k$), получаем систему уравнений $\partial\sigma^2/\partial a_j = 0$ ($j = 1,2, \ldots, k$), которая разрешима относительно неизвестных параметров $a_1, a_2, \ldots, a_k$, если $f(\bar{x}_1, a_1, a_2, \ldots, a_k)$ линейна относительно этих параметров. В общем случае для определения оптимальных значений этих параметров используют различные методы: линеаризации, итерационные и т. д.

# IV.1. СГЛАЖИВАНИЕ ФУНКЦИЕЙ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ ПАРАМЕТРОМ

## IV.1.1. ПРЯМАЯ С ЗАДАННЫМ НАКЛОНОМ (УГЛОВЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ k)

Исходные данные $(x_i, y_i)$ сглаживаются прямой $f = a + kx$ с неизвестным параметром a. Требуется найти значение параметра a и средний квадрат ошибки $\sigma^2$.
Расчетные формулы:

$$a = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - kx_i); \quad \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - kx_i)^2 - a^2.$$

Программа IV.1.1/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P 2 | 21 | 25 | F $x^2$ | 55 | 54 | × | 26 |
| 01 | Cx | 76 | 30 | ↑ | 06 | 55 | ↑ | 06 |
| 02 | P 3 | 31 | 31 | F 4 | 42 | 60 | F 3 | 32 |
| 03 | P 4 | 41 | 32 | + | 96 | 61 | F $x^2$ | 55 |
| 04 | P 5 | 51 | 33 | P 4 | 41 | 62 | — | 86 |
| 05 | С/П | 78 | 34 | F 5 | 52 | 63 | P 4 | 41 |
| 10 | P 6 | 61 | 35 | 1 | 14 | 64 | ↑ | 06 |
| 11 | F 2 | 22 | 40 | + | 96 | 65 | F 3 | 32 |
| 12 | × | 26 | 41 | БП | 58 | 70 | С/П | 78 |
| 13 | ↑ | 06 | 42 | F ↑ | 05 | | | |
| 14 | F 6 | 62 | 43 | F 1/x | 45 | | | |
| 15 | — | 86 | 44 | ↑ | 06 | | Регистры | |
| 20 | ↑ | 06 | 45 | F 3 | 32 | 2 | к | |
| 21 | F 3 | 32 | 50 | /—/ | 56 | 3 | Σ (кх—у); a | |
| 22 | + | 96 | 51 | × | 26 | 4 | Σ (кх—у)²; $\sigma^2$ | |
| 23 | P 3 | 31 | 52 | P 3 | 31 | 5 | i; n | |
| 24 | ←→ | 16 | 53 | F 4 | 42 | 6 | y | |

Программа IV.1.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 0 | 40 | 14 | + | 10 | 28 | F Bx | 0 |
| 01 | 3 | 03 | 15 | x→П 4 | 44 | 29 | П→x 0 | 60 |
| 02 | F $10^x$ | 15 | 16 | ←→ | 14 | 30 | : | 13 |
| 03 | x→П 3 | 43 | 17 | F L3 | 5— | 31 | : | 13 |
| 04 | Cx | 0Г | 18 | 06 | 06 | 32 | П→x 3 | 63 |
| 05 | x→П 4 | 44 | 19 | 3 | 03 | 33 | F $x^2$ | 22 |
| 06 | С/П | 50 | 20 | F $10^x$ | 15 | 34 | — | 11 |
| 07 | П→x 0 | 60 | 21 | П→x 3 | 63 | 35 | x→П 4 | 44 |
| 08 | : | 13 | 22 | — | 11 | 36 | П→x 3 | 63 |
| 09 | — | 11 | 23 | П→x 0 | 60 | 37 | С/П | 50 |

*Продолжение*

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | — | 11 | 24 | : | 13 |
| 11 | F Bx | 0 | 25 | : | 13 |
| 12 | F $x^2$ | 22 | 26 | x→П 3 | 43 |
| 13 | П→x 4 | 64 | 27 | П→x 4 | 64 |

Регистры
0 к
3 (1000—i); a
4 $\Sigma (y/к—x)^2$; $\sigma^2$

Для обеих программ используется единая инструкция.

Инструкция IV.1.1/21, 54, 52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Занести угловой коэффициент | к | В/О С/П | 0 |
| 2. Занести числа очередной пары исходных данных | $x_1$<br>$y_1$ | В↑<br>С/П | $x_1$<br>i |
| 3. Если исходные данные исчерпаны, далее, нет — к п. 2 | | | |
| 4. Вычислить a и $\sigma^2$: | | | |
| а) для программы IV.1.1/21 | | БП 4 С П | a—в рег. X, 3 |
| б) для программы IV.1.1/54, 52 | | БП 19 С/П | $\sigma^2$—в рег Y, 4 |

Время обработки одной пары чисел — 4 — 5 с, время вычисления a и $\sigma^2$ — 4—7 с.

*Пример.* Сгладить совокупность данных — 1; 0 0 ; 2 2; 8 3; 11 3; 10 6; 20 прямой с угловым коэффициентом к = 3. Определить a и $\sigma^2$. Ответ: a = 2,0; $\sigma^2$ = 0,333.

### IV.1.2. ФУНКЦИЯ С НЕИЗВЕСТНЫМ МНОЖИТЕЛЕМ

Опытные данные сглаживаются функцией $y = в\,\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ полностью известна. Требуется найти значение параметра b и средний квадрат ошибки $\sigma^2$.

Расчетные формулы:

$$b = \frac{\Sigma y_1 \varphi(x_1)}{\Sigma \varphi^2(x_1)}; \quad \sigma^2 = \frac{1}{n}[\Sigma y_i^2 - b\Sigma y_1 \varphi(x_1)].$$

Подпрограмма вычисления $\varphi(x)$ размещается в ячейках памяти непосредственно за основной программой и заканчивается командой В/О. Аргумент x и ответ $\varphi(x)$ — в регистре X.

В подпрограммах для расчета $\varphi(x)$ могут быть использованы регистры:

а) для программы IV.1.2/21 8, S1 — S6, а также 7 в качесте оперативного;

б) для программы IV. 1.2/54, 52 5 — Д (и Е).

Программа IV.1.2/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | Cx | 76 | 32 | ↑ | 06 | 64 | × | 26 |
| 01 | P 2 | 21 | 33 | F 2 | 22 | 65 | ↑ | 06 |
| 02 | P 3 | 31 | 34 | + | 96 | 70 | F 4 | 42 |
| 03 | P 4 | 41 | 35 | P 2 | 21 | 71 | — | 86 |
| 04 | P 5 | 51 | 40 | F 6 | 62 | 72 | ↑ | 06 |
| 05 | C/П | 78 | 41 | F $x^2$ | 55 | 73 | F 5 | 52 |
| 10 | P 6 | 61 | 42 | ↑ | 06 | 74 | : | 36 |
| 11 | ←→ | 16 | 43 | F 4 | 42 | 75 | /—/ | 56 |
| 12 | ПП | 68 | 44 | + | 96 | 80 | ↑ | 06 |
| 13 | F — | 85 | 45 | P 4 | 41 | 81 | P 7 | 71 |
| 14 | P 7 | 71 | 50 | F 5 | 52 | 82 | F 6 | 62 |
| 15 | F $x^2$ | 55 | 51 | 1 | 14 | 83 | C/П | 78 |
| 20 | ↑ | 06 | 52 | + | 96 | | | |
| 21 | F 3 | 32 | 53 | БП | 58 | | Регистры | |
| 22 | + | 96 | 54 | F ↑ | 05 | 2 | Σ y φ | |
| 23 | P 3 | 31 | 55 | F 2 | 22 | 3 | $\Sigma\varphi^2$ | |
| 24 | F 7 | 72 | 60 | ↑ | 06 | 4 | $\Sigma y^2$ | |
| 25 | ↑ | 06 | 61 | F 3 | 32 | 5 | i; n | |
| 30 | F 6 | 62 | 62 | : | 36 | 6 | y; b | |
| 31 | × | 26 | 63 | P 6 | 61 | 7 | φ; $\sigma^2$ | |

Программа IV.1.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | Cx | 0Г | 17 | × | 12 | 34 | × | 12 |
| 01 | x→П 6 | 46 | 18 | П→x 6 | 66 | 35 | П→x 2 | 62 |
| 02 | x→П 7 | 47 | 19 | + | 10 | 36 | — | 11 |
| 03 | x→П 2 | 42 | 20 | x→П 6 | 46 | 37 | /—/ | 0L |
| 04 | x→П 4 | 44 | 21 | ←→ | 14 | 38 | П→x 4 | 64 |
| 05 | C/П | 50 | 22 | П→x 7 | 67 | 39 | : | 13 |
| 06 | x→П 3 | 43 | 23 | + | 10 | 40 | x→П 7 | 47 |
| 07 | F $x^2$ | 22 | 24 | x→П 7 | 47 | 41 | П→x 6 | 66 |
| 08 | П→x 2 | 62 | 25 | К П→x 4 | Г4 | 42 | C/П | 50 |
| 09 | + | 10 | 26 | П→x 4 | 64 | | | |
| 10 | x→П 2 | 42 | 27 | БП | 51 | | | |
| 11 | ←→ | 14 | 28 | 05 | 05 | | Регистры | |
| 12 | ПП | 53 | 29 | П→x 6 | 66 | 2 | $\Sigma y^2$ | |
| 13 | 43 | 43 | 30 | B ↑ | 0E | 3 | y | |
| 14 | F $x^2$ | 22 | 31 | П→x 7 | 67 | 4 | i; n | |
| 15 | F Bx | 0 | 32 | : | 13 | 6 | $\Sigma y\varphi$; b | |
| 16 | П→x 3 | 63 | 33 | x→П 6 | 46 | 7 | $\Sigma\varphi^2$; $\sigma^2$ | |

Для обеих программ используется единая инструкция.

Инструкция IV.1.2/21, 54, 52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Очистить сумматоры | | В/О С/П | 0 |
| 2. Занести числа очередной пары исходных данных | $x_1$<br>$y_1$ | В↑<br>С/П | $x_1$ |
| 3. Если данные исчерпаны, далее, нет — к п. 2 | | | |
| 4. Вычислить b и $\sigma^2$: | | | |
| а) для программы IV.1.2/21 | | БП /—/ С/П | в—в рег. X, 6 |
| б) для программы IV.1.2/54, 52 | | БП 29 С/П | $\sigma^2$—в рег. Y, 7 |

Время обработки одной пары чисел — 7—10 с; время вычисления b и $\sigma^2$ — 5 с.

*Пример.* Сгладить совокупность данных ($x_1$, $y_1$) 1; 2 1,5; 7 2; 12 2; 13 2,5; 18 функцией $y = bx^2$. Определить b и $\sigma^2$.

Подпрограмма вычисления функции $\varphi(x) = x^2$ имеет вид: $Fx^2$ В/О

Выполнив требования инструкции, получим ответ $b = 2{,}985$; $\sigma^2 = 0{,}522$.

### IV.1.3. ФУНКЦИЯ С НЕИЗВЕСТНЫМ СЛАГАЕМЫМ

Опытные данные сглаживаются функцией $y = a + \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ полностью известна. Требуется найти значение параметра a и средний квадрат ошибки $\sigma^2$.

Расчетные формулы:

$$a = \frac{1}{n}\Sigma[y_1 - \varphi(x_1)];\quad \sigma^2 = \frac{1}{n}\Sigma[y_1 - \varphi(x_1)]^2 - a^2.$$

Подпрограмма вычисления $\varphi(x)$ размещается в ячейках памяти машины непосредственно за основной программой и заканчивается командой В/О. Аргумент x и ответ $\varphi(x)$ — в регистре X.

Программа IV.1.3/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | Cx | 76 | 25 | F 3 | 32 | 54 | F 5 | 52 |
| 01 | P 2 | 21 | 30 | ←→ | 16 | 55 | : | 36 |
| 02 | P 3 | 31 | 31 | F $x^2$ | 55 | 60 | ↑ | 06 |
| 03 | P 5 | 51 | 32 | + | 96 | 61 | F 2 | 22 |
| 04 | С/П | 78 | 33 | P 3 | 31 | 62 | F $x^2$ | 55 |
| 05 | P 4 | 41 | 34 | F 5 | 52 | 63 | — | 86 |
| 10 | ←→ | 16 | 35 | 1 | 14 | 64 | P 3 | 31 |
| 11 | ПП | 68 | 40 | + | 96 | 65 | ↑ | 06 |

*Продолжение*

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 | P Cx | 73 | 41 | БП | 58 | 70 | F 2 | 22 |
| 13 | ↑ | 06 | 42 | 0 | 04 | 71 | С/П | 78 |
| 14 | F 4 | 42 | 43 | F 2 | 22 | | | |
| 15 | ←→ | 16 | 44 | ↑ | 06 | | Регистры | |
| 20 | — | 86 | 45 | F 5 | 52 | | | |
| 21 | ↑ | 06 | 50 | : | 36 | 2 | $\Sigma (y-\varphi)$; a | |
| 22 | F 2 | 22 | 51 | P 2 | 21 | 3 | $\Sigma (y-\varphi)^2$; $\sigma^2$ | |
| 23 | + | 96 | 52 | F 3 | 32 | 4 | y | |
| 24 | P 2 | 21 | 53 | ↑ | 06 | 5 | i; n | |

Программа IV.1.3/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | Cx | 0Г | 15 | x→П 2 | 42 | 30 | : | 13 |
| 01 | x→П 2 | 42 | 16 | ←→ | 14 | 31 | П→x 2 | 62 |
| 02 | x→П 3 | 43 | 17 | П→x 3 | 63 | 32 | F $x^2$ | 22 |
| 03 | x→П 5 | 45 | 18 | + | 10 | 33 | — | 11 |
| 04 | С/П | 50 | 19 | x→П 3 | 43 | 34 | x→П 3 | 43 |
| 05 | x→П 4 | 44 | 20 | К П→x 5 | Г5 | 35 | П→x 2 | 62 |
| 06 | ←→ | 14 | 21 | П→x 5 | 65 | 36 | С/П | 50 |
| 07 | ПП | 53 | 22 | БП | 51 | | | |
| 08 | 37 | 37 | 23 | 04 | 04 | | | |
| 09 | П→x 4 | 64 | 24 | П→x 2 | 62 | | Регистры | |
| 10 | — | 11 | 25 | П→x 5 | 65 | | | |
| 11 | F $x^2$ | 22 | 26 | : | 13 | 2 | $\Sigma (y-\varphi)$; a | |
| 12 | П→x 2 | 62 | 27 | x→П 2 | 42 | 3 | $\Sigma (y-\varphi)^2$; $\sigma^2$ | |
| 13 | F Bx | 0 | 28 | П→x 3 | 63 | 4 | $y_1$ | |
| 14 | — | 11 | 29 | П→x 5 | 65 | 5 | i; n | |

Для обеих программ используется единая инструкция.

Инструкция IV.1.3/21, 54, 52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Очистить сумматоры | | В/О С/П | 0 |
| 2. Занести числа очередной пары исходных данных | $x_1$<br>$y_1$ | В↑<br>С/П | $x_1$<br>i |
| 3. Если данные исчерпаны, далее, нет — к п. 2 | | | |
| 4. Вычислить a, $\sigma^2$: | | | |
| а) для программы IV.1.3/21 | | БП 4 С/П | a—в рег. X, 2 |
| б) для программы IV.1.3/54, 52 | | БП 24 С/П | $\sigma^2$—в рег. Y, 3 |

Время обработки одной пары чисел — 6—10 с, время вычисления a и $\sigma^2$ — 5 с.

*Пример.* Сгладить совокупность данных ($x_1$, $y_1$) 1; —1 2; 0,4 3; 2,3 4; 4,5 5; 7 функцией $y = a + x \ln x$. Определить a и $\sigma^2$.

Подпрограмма вычисления функции $\varphi(x)$ имеет вид:

а) для программы IV.1.3/21 ↑ P ln× B/O

б) для программы IV.1.3/54,52 B ↑ F ln× B/O

Выполнив требования инструкции, получим ответ $a = -1{,}015$, $\sigma^2 = 6{,}73 \cdot 10^{-4}$.

### IV.1.4. ПРОИЗВОЛЬНАЯ НЕПРЕРЫВНАЯ ФУНКЦИЯ

Исходные данные сглаживаются функцией f (x, a), в общем случае нелинейной по a.

#### IV.1.4.1. РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ТЕЙЛОРА

Если сглаживающая функция f (x, a) непрерывна и дифференцируема по переменной a, ее можно представить отрезком ряда Тейлора в некоторой окрестности точки $a_0$, ограничившись линейным приближением:

$$f(x, a) \approx f(x, a_0) + (a - a_0) f'(x, a_0).$$

Задача о сглаживании при этом сводится к решению системы уравнений относительно приращения неизвестного параметра $\Delta a = a - a_0$. Применяя алгоритм несколько раз, можно найти решение с требуемой точностью.

Вопрос о сходимости здесь не рассматривается; отметим только, что сходимость зависит от вида сглаживающей функции, начального приближения и разброса исходных данных.

Расчетные формулы:

$$\widehat{\sigma_j^2} = n\sigma_j^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i, a_j)]^2; \quad a_{j+1} = a_j + \Delta a_j;$$

$$\Delta a_j = \frac{\Sigma (y_i - f) f'}{\Sigma (f')^2}.$$

Последовательность вычислений такова. Вводится начальное приближение $a_0$, затем исходные данные. Вычисляется величина $\hat{\sigma}_0^2$, пропорциональная среднему квадрату ошибки ($\widehat{\sigma_0^2} = n\sigma_0^2$), и затем следующее приближение неизвестного параметра a. Цикл «ввод данных — вычисление $\hat{\sigma}_j^2$ и $a_j$» повторяется до тех пор, пока значение среднего квадрата ошибки не установится.

Пользователем должна быть составлена подпрограмма вычисления значений функции f (x, a) и ее производной $f' = \frac{df}{dx}$, размещаемая в ячейках памяти непосредственно за основной программой и имеющая в конце команду возврата B/O.

Аргумент x берется из регистров X или 5, значение $a_j$ — из регистра 7. Вычисленное значение f′ помещается в регистр 4, а значение f оставляется в регистре X.

В подпрограмме можно использовать следующие регистры:

а) для программы IV.1.4.1/21 S1 — S6, а также P4 в качестве оперативного;

б) для программы IV.1.4.1/54,52 8 — Д (и Е).

Программа IV.1.4.1/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | В/О | 48 | 31 | F 4 | 42 | 62 | ←→ | 16 |
| 01 | F 5 | 52 | 32 | × | 26 | 63 | — | 86 |
| 02 | С/П | 78 | 33 | ↑ | 06 | 64 | P 7 | 71 |
| 03 | P 6 | 61 | 34 | F 2 | 22 | 65 | P 5 | 51 |
| 04 | ←→ | 16 | 35 | + | 96 | 70 | Cx | 76 |
| 05 | P 5 | 51 | 40 | P 2 | 21 | 71 | P 8 | 81 |
| 10 | ПП | 68 | 41 | F 4 | 42 | 72 | P 2 | 21 |
| 11 | Cx | 76 | 42 | F $x^2$ | 55 | 73 | P 3 | 31 |
| 12 | ↑ | 06 | 43 | ↑ | 06 | 74 | В/О | 48 |
| 13 | F 6 | 62 | 44 | F 8 | 82 | | | |
| 14 | — | 86 | 45 | + | 96 | | Регистры | |
| 15 | P 6 | 61 | 50 | P 8 | 81 | | | |
| 20 | F $x^2$ | 55 | 51 | В/О | 48 | 2 | Σ (f—y)f′ | |
| 21 | ↑ | 06 | 52 | F 2 | 22 | 3 | Σ $(f-y)^2$ | |
| 22 | F 3 | 32 | 53 | ↑ | 06 | 4 | f′ | |
| 23 | + | 96 | 54 | F 8 | 82 | 5 | x; $a_{j+1}$ | |
| 24 | P 3 | 31 | 55 | : | 36 | 6 | y; (f—y) | |
| 25 | F 6 | 62 | 60 | ↑ | 06 | 7 | $a_j$ | |
| 30 | ↑ | 06 | 61 | F 7 | 72 | 8 | Σ $(f')^2$ | |

Инструкция IV.1.4.1/21

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Ввести программу и подпрограмму вычисления f(x, a) и f′(x, a) | | | |
| 2. Занести исходное значение параметра a | $a_0$ | БП F ВП С/П | $a_0$ |
| 3. Занести число очередной пары исходных данных | $x_1$<br>$y_1$ | ↑<br>С/П | $x_1$<br>$x_1$ |
| 4. Если данные исчерпаны, далее, нет — к п. 3 | | | |
| 5. Вывести значение $\hat{\sigma}_j^2$ | | F 3 | $\hat{\sigma}_j^2$ |
| 6. Вычислить очередное приближение параметра a | | БП Р /—/ С/П | $a_{j+1}$—в рег. X, 5, 7 |
| 7. Для осуществления следующей итерации — к п. 3 | | | |

Программа IV.1.4.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 7 | 47 | 16 | П→x 4 | 64 | 32 | 06 | 06 |
| 01 | x→П 5 | 45 | 17 | F Bx | 0 | 33 | П→x 7 | 67 |
| 02 | Cx | 0Г | 18 | × | 12 | 34 | П→x 2 | 62 |
| 03 | x→П 1 | 41 | 19 | П→x 2 | 62 | 35 | П→x 1 | 61 |
| 04 | x→П 2 | 42 | 20 | + | 10 | 36 | : | 13 |
| 05 | x→П 3 | 43 | 21 | x→П 2 | 42 | 37 | — | 11 |
| 06 | П→x 5 | 65 | 22 | ←→ | 14 | 38 | БП | 51 |
| 07 | С/П | 50 | 23 | П→x 3 | 63 | 39 | 00 | 00 |
| 08 | x→П 6 | 46 | 24 | + | 10 | Регистры | | |
| 09 | ←→ | 14 | 25 | x→П 3 | 43 | 1 | $\Sigma (f')^2$ | |
| 10 | x→П 5 | 45 | 26 | П→x 4 | 64 | 2 | $\Sigma (f-y) f'$ | |
| 11 | ПП | 53 | 27 | F $x^2$ | 22 | 3 | $\Sigma (f-y)^2$; $\hat{\sigma}^2$ | |
| 12 | 40 | 40 | 28 | П→x 1 | 61 | 4 | f' | |
| 13 | П→x 6 | 66 | 29 | + | 10 | 5 | x; $aj_{+1}$ | |
| 14 | — | 11 | 30 | x→П 1 | 41 | 6 | y; (f—y) | |
| 15 | F $x^2$ | 22 | 31 | БП | 51 | 7 | aj | |

Инструкция IV.1.4.1/54,52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Ввести программу и подпрограмму вычисления f(x, a) и f'(x, a) | | | |
| 2. Занести исходное значение параметра a | $a_0$ | В/О С/П | $a_0$ |
| 3. Занести числа очередной пары исходных данных | $x_i$ | В↑ | $x_i$ |
| | $y_i$ | С/П | $x_i$ |
| 4. Если данные исчерпаны, далее, нет — к п. 3 | | | |
| 5. Вывести значение $\hat{\sigma}^2_j$ | | П→x 3 | $\hat{\sigma}^2_j$ |
| 6. Вычислить очередное приближение параметра a | | БП 33 С/П | $a_{j+1}$—в рег. X,5,7 |
| 7. Для осуществления следующей итерации — к п. 3 | | | |

Время обработки одной пары чисел — 7 — 11 с, время вычисления a — 3—4 с.

*Пример.* Сгладить совокупность данных ($x_i$, $y_i$) 1; 0,4 2; 1,1 3;1,5 4; 1,8 функцией $y = \ln ax$. Определить a и $\hat{\sigma}^2$. В качестве начального приближения принять $a_0 = 1{,}0$.

Производная сглаживающей функции по параметру a есть $\frac{1}{a}$. Подпрограмма вычисления значений f и $f'_a$ имеет вид:

а) для программы IV.1.4.1/21 ↑ F 7 F 1/x Р 4: Р ln В/О

б) для программы IV.1.4.1/54,52 П → x 7 F 1/x x → П 4 : F ln В/О

Выполнив четыре итерации, получим:

| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_i$ | 1 | 1,405 | 1,497 | 1,500 | 1,500 |
| $\hat{\sigma}_i^2$ | 0,658 | 0,0171 | $1{,}33 \cdot 10^{-4}$ | $1{,}16 \cdot 10^{-4}$ | $1{,}16 \cdot 10^{-4}$ |

### IV.1.4.2. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Производится оптимизация параметра a аппроксимирующей функции f (x, a) при задании исходной функции y в n узлах. Оптимальное значение a определяется методом последовательного приближения при минимизации величины невязки

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i, a) - y_i]^2.$$

По приведенным программам вычисляется оптимальное значение a и соответствующее минимальное значение $\hat{\sigma}^2$.

Подпрограмма вычисления f(x, a) размещается непосредственно за основной программой и заканчивается командой В/О. Для вычисления f (x, a) значение x берется из регистра X, а значение a — из регистра A. Вычисленное значение f (x, a) помещается в регистр X.

#### IV.1.4.2.1. Произвольное распределение узлов $x_i$

Узлы $x_i$ функции y заданы произвольно ($x_i - x_{i-1} \neq$ const; i = 2, 3, ..., n), количество узлов n не превышает 5 ($n \leqslant 5$). Значения узлов и соответствующих y ($x_i$) вводятся вручную в регистры памяти соответственно 0 — 4 и 5 — 9 и в процессе вычислений не изменяются.

Программа IV.1.4.2.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П B | 4L | 29 | П→x 7 | 67 | 58 | БП | 51 |
| 01 | — | 11 | 30 | ПП | 53 | 59 | 06 | 06 |
| 02 | x→П A | 4— | 31 | 65 | 65 | 60 | П→x A | 6— |
| 03 | 9 | 09 | 32 | П→x 3 | 63 | 61 | П→x B | 6L |
| 04 | F $10^x$ | 15 | 33 | ПП | 53 | 62 | — | 11 |
| 05 | x→П C | 4C | 34 | 71 | 71 | 63 | x→П A | 4— |
| 06 | П→x A | 6— | 35 | П→x 8 | 68 | 64 | С/П | 50 |
| 07 | П→x B | 6L | 36 | ПП | 53 | 65 | — | 11 |
| 08 | + | 10 | 37 | 65 | 65 | 66 | F $x^2$ | 22 |
| 09 | x→П A | 4— | 38 | П→x 4 | 64 | 67 | П→x C | 6C |

*Продолжение*

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | П→х С | 6С | 39 | ПП | 53 | 68 | + | 10 |
| 11 | х→П Д | 4Г | 40 | 71 | 71 | 69 | х→П С | 4С |
| 12 | Сх | 0Г | 41 | П→х 9 | 69 | 70 | В/О | 52 |
| 13 | х→П С | 4С | 42 | ПП | 53 | | Регистры | |
| 14 | П→х 0 | 60 | 43 | 65 | 65 | | | |
| 15 | ПП | 53 | 44 | П→х Д | 6Г | | 0 | $x_1$ |
| 16 | 71 | 71 | 45 | — | 11 | | 1 | $x_2$ |
| 17 | П→х 5 | 65 | 46 | F x⩾0 | 59 | | 2 | $x_3$ |
| 18 | ПП | 53 | 47 | 06 | 06 | | 3 | $x_4$ |
| 19 | 65 | 65 | 48 | П→х В | 6L | | 4 | $x_5$ |
| 20 | П→х 1 | 61 | 49 | F cos | 1Г | | 5 | $y_1$ |
| 21 | ПП | 53 | 50 | F $\cos^{-1}$ | 1— | | 6 | $y_2$ |
| 22 | 71 | 71 | 51 | F x≠0 | 57 | | 7 | $y_3$ |
| 23 | П→х 6 | 66 | 52 | 60 | 60 | | 8 | $y_4$ |
| 24 | ПП | 53 | 53 | П→х В | 6L | | 9 | $y_5$ |
| 25 | 65 | 65 | 54 | 3 | 03 | | А | a |
| 26 | П→х 2 | 62 | 55 | : | 13 | | В | h |
| 27 | ПП | 53 | 56 | /—/ | 0L | | С оперативный | |
| 28 | 71 | 71 | 57 | х→П В | 4L | | Д $\hat{\sigma}^2$ | |

Программа IV.1.4.2.1/52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | х→П В | 4L | 28 | ПП | 53 | 56 | ←→ | 14 |
| 01 | — | 11 | 29 | 55 | 55 | 57 | ПП | 53 |
| 02 | х→П А | 4— | 30 | П→х 4 | 64 | 58 | 66 | 66 |
| 03 | 9 | 09 | 31 | П→х 9 | 69 | 59 | П→х Е | 6Е |
| 04 | F $10^x$ | 15 | 32 | ПП | 53 | 60 | — | 11 |
| 05 | х→П С | 4С | 33 | 55 | 55 | 61 | F $x^2$ | 22 |
| 06 | П→х А | 6— | 34 | П→х Д | 6Г | 62 | П→х С | 6С |
| 07 | П→х В | 6L | 35 | — | 11 | 63 | + | 10 |
| 08 | + | 10 | 36 | F x⩾0 | 59 | 64 | х→П С | 4С |
| 09 | х→П А | 4— | 37 | 06 | 06 | 65 | В/О | 52 |
| 10 | П→х С | 6С | 38 | П→х В | 6L | | | |
| 11 | х→П Д | 4Г | 39 | F cos | 1Г | | Регистры | |
| 12 | Сх | 0Г | 40 | F $\cos^{-1}$ | 1— | | | |
| 13 | х→П С | 4С | 41 | F x≠0 | 57 | | 0 | $x_1$ |
| 14 | П→х 0 | 60 | 42 | 50 | 50 | | 1 | $x_2$ |
| 15 | П→х 5 | 65 | 43 | П→х В | 6L | | 2 | $x_3$ |
| 16 | ПП | 53 | 44 | 3 | 03 | | 3 | $x_4$ |
| 17 | 55 | 55 | 45 | : | 13 | | 4 | $x_5$ |
| 18 | П→х 1 | 61 | 46 | /—/ | 0L | | 5 | $y_1$ |
| 19 | П→х 6 | 66 | 47 | х→П В | 4L | | 6 | $y_2$ |
| 20 | ПП | 53 | 48 | БП | 51 | | 7 | $y_3$ |
| 21 | 55 | 55 | 49 | 06 | 06 | | 8 | $y_4$ |
| 22 | П→х 2 | 62 | 50 | П→х А | 6— | | 9 | $y_5$ |
| 23 | П→х 7 | 67 | 51 | П→х В | 6L | | А | a |
| 24 | ПП | 53 | 52 | — | 11 | | В | h |
| 25 | 55 | 55 | 53 | х→П А | 4— | | С, Е оперативные | |
| 26 | П→х 3 | 63 | 54 | С/П | 50 | | Д $\hat{\sigma}^2$ | |
| 27 | П→х 8 | 68 | 55 | х→П Е | 4Е | | | |

Для обеих программ используется единая инструкция.

Инструкция IV.1.4.2.1/54,52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Ввести программу и подпрограмму вычисления f(x, a) | | | |
| 2. При $n<5$ ввести в программу изменения (согласно приведенной ниже в тексте таблице) | | | |
| 3. Переключатель Р/Г поставить либо в положение Г для грубой оценки a, либо в положение Р для более точной оценки a | | | |
| 4. Занести значения $x_1 - x_5$, $y_1 - y_5$ | $x_1$ | x→П 0 | $x_1$ |
| | $x_2$ | x→П 1 | $x_2$ |
| | . . . . . | | |
| | $x_5$ | x→П 4 | $x_5$ |
| | $y_1$ | x→П 5 | $y_1$ |
| | $y_2$ | x→П 6 | $y_2$ |
| | . . . . . | | |
| | $y_5$ | x→П 9 | $y_5$ |
| 5. Занести начальные значения $a_0$ и $h_0$ (шаг изменения a) | $a_0$<br>$h_0$ | В↑ | $a_0$ |
| 6. Вычислить конечные значения a и $\hat{\sigma}^2$ | | В/О С/П | a — в рег. X, A<br>$\hat{\sigma}^2$ — в рег. Д |

Программы IV.1.4.2.1/54,52 и IV.1.4.2.1/52 используются без изменений при n = 5. При $n < 5$ в обе программы следует ввести изменения в соответствии с приведенной ниже таблицей. При этом часть регистров памяти в основной программе не используется, в регистры памяти необходимо ввести лишь n пар используемых значений $x_i$, $y_i$ ($i = 1,2, \ldots, n$).

Таблица изменений в программах IV.1.4.2.1/54,52 и IV.1.4.2.1/52 при $n < 5$

| n | Программа IV.1.4.2.1/54.52 | | Программа IV.1.4.2.1/52 | | Регистры, не используемые в программе |
|---|---|---|---|---|---|
| | изменяемые адреса | новые команды | изменяемые адреса | новые команды | |
| 2 | 26;27 | БП 44 | 22;23 | БП 34 | 2—4; 7—9 |
| 3 | 32;33 | БП 44 | 26;27 | БП 34 | 3; 4; 8; 9 |
| 4 | 38;39 | БП 44 | 30;31 | БП 34 | 4; 9 |
| 5 | Без изменений | | | | Нет |

Время вычисления — $T = (10 — 12) \cdot n$ мин.

*Пример.* Определить оптимальное значение a и соответствующее значение невязки $\hat{\sigma}^2$ при сглаживании исходных данных в четырех точках:

$$x_i = 0 \quad 1 \quad 4 \quad 9$$

$$y_i = 0{,}71 \quad 1{,}57 \quad 3{,}4 \quad 100{,}0$$

при задании аппроксимирующей функции f (x, a) в виде

$$f(x, a) = \sqrt{e^{ax}/(a + x^4)}$$

и начальных значениях $a_0 = 1$, $h_0 = 0{,}4$.

Решение.

Согласно инструкции и таблице изменений произвести следующие изменения в программах:

в программе IV.1.4.2.1/54, 52 в адресах 38; 39 записать соответственно новые команды БП 44;

в программе IV.1.4.2.1/52 в адресах 30; 31 записать соответственно новые команды БП 34.

Ввести подпрограмму вычисления f (x, a), которая имеет вид: В↑ П→ x A × Fe$^x$ ↔ Fx$^2$ Fx$^2$ П→ xA + : F$\sqrt{}$ В/О

Занести значения $x_i$ и $y_i$ (i = 1—4) в регистры памяти 0—3 и 5—8 соответственно. Переключатель Р/Г поставить в положение: либо Г — для грубой оценки a, либо Р — для более точной оценки a. Ввести $a_0$, $h_0$ и запустить программу на счет.

Ответ:

1. переключатель Р/Г в положении Г.

$$a = 1{,}9975; \quad \hat{\sigma}^2 = 1{,}17; \quad h_{кон} = 4{,}9 \cdot 10^{-3}.$$

Время вычисления примера — 11 мин.

2. переключатель Р/Г в положении Р.

$$a = 1{,}9999; \quad \hat{\sigma}^2 = 3{,}47 \cdot 10^{-4}; \quad h_{кон} = -1{,}8 \cdot 10^{-4}.$$

Время вычисления примера — 25 мин.

### IV.1.4.2.2. Равномерный шаг по x

Значения функции $y_i$ в равномерно отстоящих узлах ($x_i - x_{i-1} = \Delta x = \text{const}$; i = 2,3, ..., n), а также значение первого узла $x_1$ и шаг $\Delta x$ заносятся вручную в регистры памяти согласно схемам заполнения регистров, представленных в конце приведенных программ.

Приведены две программы вычислений: IV.1.4.2.2/54 ($n \leqslant 7$) и IV.1.4.2.2/52 ($n \leqslant 8$).

При значениях n, меньших максимального, в обе программы следует внести изменения, поместив значение используемого n в адрес 10 основной программы. При этом в регистры памяти требуется занести только n значений $y_i$, в результате чего часть регистров памяти оказывается неиспользованной в основной программе и может быть использована в подпрограмме для вычисления f (x, a).

Программа IV.1.4.2.2/54

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П B | 4L | 22 | x→П 8 | 48 | 44 | 3 | 03 |
| 01 | — | 11 | 23 | ПП | 53 | 45 | : | 13 |
| 02 | x→П A | 4— | 24 | 55 | 55 | 46 | /—/ | 0L |
| 03 | 9 | 09 | 25 | К П→x B↑ | ГЕ | 47 | x→П B | 4L |
| 04 | F $10^x$ | 15 | 26 | — | 11 | 48 | БП | 51 |
| 05 | x→П Д | 4Г | 27 | F $x^2$ | 22 | 49 | 06 | 06 |
| 06 | П→x A | 6— | 28 | П→x C | 6C | 50 | П→x A | 6— |
| 07 | П→x B | 6L | 29 | + | 10 | 51 | П→x B | 6L |
| 08 | + | 10 | 30 | F L0 | 5Г | 52 | — | 11 |
| 09 | x→П A | 4— | 31 | 18 | 18 | 53 | x→П A | 4— |
| 10 | 7 | 07 | 32 | П→x Д | 6Г | 54 | С/П | 50 |
| 11 | x→П 0 | 40 | 33 | ←→ | 14 | | | |
| 12 | П→x 9 | 69 | 34 | x→П Д | 4Г | | Регистры | |
| 13 | × | 12 | 35 | — | 11 | | | |
| 14 | П→x 8 | 68 | 36 | F x<0 | 5C | 0, С оперативные | | |
| 15 | + | 10 | 37 | 06 | 06 | 1—7 | $y_1$—$y_7$ | |
| 16 | x→П 8 | 48 | 38 | П→x B | 6L | 8 | $x_1$ | |
| 17 | Cx | 0Г | 39 | F cos | 1Г | 9 | $\Delta x$ | |
| 18 | x→П C | 4C | 40 | F $\cos^{-1}$ | 1— | A | a | |
| 19 | П→x 8 | 68 | 41 | F x≠0 | 57 | B | h | |
| 20 | П→x 9 | 69 | 42 | 50 | 50 | Д | $\hat{\sigma}^2$ | |
| 21 | — | 11 | 43 | П→x B | 6L | | | |

Программа IV.1.4.2.2/52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П B | 4L | 23 | П→x E | 6E | 46 | 54 | 54 |
| 01 | — | 11 | 24 | П→x 9 | 69 | 47 | П→x B | 6L |
| 02 | x→П A | 4— | 25 | — | 11 | 48 | 3 | 03 |
| 03 | 9 | 09 | 26 | x→П E | 4E | 49 | : | 13 |
| 04 | F $10^x$ | 15 | 27 | ПП | 53 | 50 | /—/ | 0L |
| 05 | x→П Д | 4Г | 28 | 59 | 59 | 51 | x→П B | 4L |
| 06 | П→x A | 6— | 29 | К П→x 0 | Г0 | 52 | БП | 51 |
| 07 | П→x B | 6L | 30 | — | 11 | 53 | 06 | 06 |
| 08 | + | 10 | 31 | F $x^2$ | 22 | 54 | П→x A | 6— |
| 09 | x→П A | 4— | 32 | П→x C | 6C | 55 | П→x B | 6L |
| 10 | 8 | 08 | 33 | + | 10 | 56 | — | 11 |
| 11 | x→П 0 | 40 | 34 | F L0 | 5Г | 57 | x→П A | 4— |
| 12 | П→x 9 | 69 | 35 | 18 | 18 | 58 | С/П | 50 |
| 13 | × | 12 | 36 | П→x Д | 6Г | | | |
| 14 | П→x E | 6E | 37 | ←→ | 14 | | Регистры | |
| 15 | + | 10 | 38 | x→П Д | 4Г | | | |
| 16 | x→П E | 4E | 39 | — | 11 | 0, С оперативные | | |
| 17 | Cx | 0Г | 40 | F x<0 | 5C | 1—8 | $y_1$—$y_8$ | |
| 18 | x→П C | 4C | 41 | 06 | 06 | 9 | $\Delta x$ | |
| 19 | П→x 0 | 60 | 42 | П→x B | 6L | A | a | |
| 20 | 1 | 01 | 43 | F cos | 1Г | B | h | |
| 21 | + | 10 | 44 | F $\cos^{-1}$ | 1— | Д | $\hat{\sigma}^2$ | |
| 22 | x→П 0 | 40 | 45 | F x≠0 | 57 | E | $x_1$ | |

Для обеих программ используется единая инструкция.

Инструкция IV.1.4.2.2/54,52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Ввести программу и подпрограмму вычисления f(x, a) | | | |
| 2. Занести в адрес 10 основной программы требуемое значение n | | | |
| 3. Переключатель Р/Г поставить либо в положение Г — для грубой оценки a, либо в положение Р — для более точной оценки a | | | |
| 4. Занести в регистры памяти значения $x_i$, $\Delta x$, $y_i$ (i=1, 2, ..., n): | | | |
| а) для программы IV.1.4.2.2/54 | $x_1$ | x→П 8 | $x_1$ |
| | $\Delta x$ | x→П 9 | $\Delta x$ |
| | $y_1$ | x→П 1 | $y_1$ |
| | . . . . . | . . . . . | . . . . . |
| | $y_7$ | x→П 7 | $y_7$ |
| б) для программы IV.1.4.2.2/52 | $x_1$ | x→П E | $x_1$ |
| | $\Delta x$ | x→П 9 | $\Delta x$ |
| | $y_1$ | x→П 1 | $y_1$ |
| | . . . . . | . . . . . | . . . . . |
| | $y_8$ | x→П 8 | $y_8$ |
| 5. Занести начальные значения $a_0$ и $h_0$ (шаг изменения a) | $a_0$<br>$h_0$ | В↑ | $a_0$<br>$h_0$ |
| 6. Вычислить конечные значения a и $\hat{\sigma}^2$ | | В/О С/П | a — в рег. X, A<br>$\hat{\sigma}^2$ — в рег. Д |

*Пример.* Вычислить оптимальное значение a и соответствующее минимальное значение $\hat{\sigma}^2$ при аппроксимации Г-функции $y = \Gamma(x)$ функцией вида $f(x, a) = \exp\left[\frac{(x-1)(x-2)}{a}\right]$ на интервале $1{,}1 \leqslant x \leqslant 1{,}9$ при задании $y_i$ в пяти равноотстоящих узлах и начальных значениях $a_0 = 1$, $h_0 = 0{,}3$.

Решение.

Занести значение $n = 5$ в адрес 10 основной программы.

Ввести подпрограмму вычисления f (x, a), которая имеет вид:

1 — $Fx^2$ F Bx — П → xA : $Fe^x$ В/О

Составить таблицу значений Г-функции в пяти равноотстоящих узлах (например, из [13])

$x_i = 1{,}1 \quad 1{,}3 \quad 1{,}5 \quad 1{,}7 \quad 1{,}9$

$y_i = 0{,}95135 \quad 0{,}89747 \quad 0{,}88623 \quad 0{,}90864 \quad 0{,}96177.$

Занести значения $x_1$, $\Delta x$, $y_1$ (i = 1—5) в регистры памяти согласно схеме заполнения регистров.

Переключатель Р/Г поставить либо в положение Г — для грубой оценки a, либо Р — для более точной оценки a.

Занести значения $a_0$ и $h_0$ и запустить программу на счет.

Ответ:

1. переключатель Р/Г в положении Г.

$$a = 2{,}0556;\ \hat{\sigma}^2 = 1{,}196 \cdot 10^{-4};\ h = -1{,}11 \cdot 10^{-2}.$$

Время вычисления примера — 18 мин.

2. переключатель Р/Г в положении Р.

$$a = 2{,}0595;\ \hat{\sigma}^2 = 1{,}179 \cdot 10^{-4};\ h = -1{,}37 \cdot 10^{-4}.$$

Время вычисления примера — 35 мин.

## IV.2. СГЛАЖИВАНИЕ ФУНКЦИЕЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

### IV.2.1. ПРЯМАЯ

Исходные данные $x_i$, $y_i$ ($i = 1,2, \ldots, n$) сглаживаются прямой $f = ax + b$ с неизвестными параметрами a и b.

По программе находятся оптимальные параметры a и b, а также соответствующее минимальное значение $\sigma^2$.

Расчетные формулы:

$$b = \frac{n \Sigma xy - \Sigma x \Sigma y}{n \Sigma x^2 - (\Sigma x)^2};$$

$$a = \frac{\Sigma y - b \Sigma x}{n};$$

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma y^2 - a \Sigma y - b \Sigma xy}{n}.$$

Программа IV.2.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П B | 4L | 28 | П→x 1 | 61 | 56 | : | 13 |
| 01 | 0 | 00 | 29 | + | 10 | 57 | x→П A | 4— |
| 02 | x→П 0 | 40 | 30 | x→П 1 | 41 | 58 | × | 12 |
| 03 | x→П 1 | 41 | 31 | П→x A | 6— | 59 | П→x B | 6L |
| 04 | x→П 2 | 42 | 32 | П→x 3 | 63 | 60 | П→x 0 | 60 |
| 05 | x→П 3 | 43 | 33 | + | 10 | 61 | × | 12 |
| 06 | x→П 4 | 44 | 34 | x→П 3 | 43 | 62 | + | 10 |
| 07 | x→П 5 | 45 | 35 | П→x 5 | 65 | 63 | П→x 4 | 64 |
| 08 | + | 10 | 36 | С/П | 50 | 64 | — | 11 |
| 09 | x→П B | 4L | 37 | БП | 51 | 65 | /—/ | 0L |
| 10 | ←→ | 14 | 38 | 09 | 09 | 66 | П→x 5 | 65 |
| 11 | x→П A | 4— | 39 | : | 13 | 67 | : | 13 |
| 12 | × | 12 | 40 | П→x 1 | 61 | 68 | x→П 1 | 41 |
| 13 | П→x 0 | 60 | 41 | × | 12 | 69 | П→x B | 6L |

*Продолжение*

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 14 | + | 10 | 42 | П→х 0 | 60 | 70 | П→х A | 6— |
| 15 | х→П 0 | 40 | 43 | — | 11 | 71 | С/П | 50 |
| 16 | К П→х 5 | Г5 | 44 | П→х 3 | 63 | | | |
| 17 | П→х A | 6— | 45 | F $x^2$ | 22 | | Регистры | |
| 18 | F $x^2$ | 22 | 46 | П→х 5 | 65 | | | |
| 19 | П→х 2 | 62 | 47 | : | 13 | 0 | Σ xy | |
| 20 | + | 10 | 48 | П→х 2 | 62 | 1 | Σ y; $\sigma^2$ | |
| 21 | х→П 2 | 42 | 49 | — | 11 | 2 | Σ $x^2$ | |
| 22 | П→х B | 6L | 50 | : | 13 | 3 | Σ x | |
| 23 | F $x^2$ | 22 | 51 | х→П B | 4L | 4 | Σ $y^2$ | |
| 24 | П→х 4 | 64 | 52 | П→х 3 | 63 | 5 | n | |
| 25 | + | 10 | 53 | × | 12 | A | $x_1$; a | |
| 26 | х→П 4 | 44 | 54 | — | 11 | B | $y_1$; b | |
| 27 | П→х B | 6L | 55 | П→х 5 | 65 | | | |

Инструкция IV.2.1/54,52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Перейти к началу программы | | В/О | |
| 2. Занести очередную пару исходных данных $x_i$, $y_i$ | $x_i$<br>$y_i$ | В↑<br>С/П | $x_i$<br>i |
| 3. Если данные исчерпаны, далее, иначе — к п. 2 | | | |
| 4. Вычислить a, b, $\sigma^2$ | | БП 39 С/П | a — в рег. X, A<br>b — в рег. Y, B<br>$\sigma^2$ — в рег. Z, 1 |

Время обработки одной пары чисел $x_i$, $y_i$ — 10 с, время вычисления a, b, $\sigma^2$ — 8 с.

*Пример.* Определить оптимальные a,b и соответствующее минимальное $\sigma^2$ при сглаживании прямой $y = ax + b$ исходных данных ($x_i$, $y_i$):

1; 1,5  2; 3  4; 5  9; 11  3; 4

Ответ: $a = 0{,}4536$; $b = 1{,}170$; $\sigma^2 = 1{,}55 \cdot 10^{-2}$.

### IV.2.2. ФУНКЦИЯ, ЛИНЕЙНО ЗАВИСЯЩАЯ ОТ ПАРАМЕТРОВ

При сглаживании экспериментальных данных функцией $f = a\psi(x) + b\varphi(x)$, где $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ известны, искомые параметры a, b и средний квадрат ошибки $\sigma^2$ вычисляются по формулам:

$$b = \frac{\Sigma y\psi \, \Sigma \psi\varphi - \Sigma y\varphi \, \Sigma \psi^2}{(\Sigma\psi\varphi)^2 - \Sigma\psi^2 \, \Sigma\varphi^2};$$

$$a = \frac{\Sigma y\psi - b\,\Sigma \psi\varphi}{\Sigma \psi^2};$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\,[\Sigma y^2 - a\,\Sigma y\,\psi - b\,\Sigma y\,\varphi].$$

Для вычисления значений функций $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ пользователем составляется подпрограмма, которая размещается в ячейках памяти непосредственно за основной программой и заканчивается командой В/О.

При заполнении подпрограммой всех свободных ячеек памяти для возврата в программу может использоваться команда В/О, находящаяся в адресе 00 основной программы.

В подпрограмме используется аргумент x, находящийся в регистре X. Вычисленные значения функций помещаются в регистры: $\psi(x)$ — в 8; $\varphi(x)$ — в 9.

Приведены две программы вычисления.

Программа IV.2.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | В/О | 52 | 29 | × | 12 | 58 | — | 11 |
| 01 | С/П | 50 | 30 | П→x B | 6L | 59 | П→x 2 | 62 |
| 02 | x→П B | 4L | 31 | П→x 9 | 69 | 60 | : | 13 |
| 03 | F $x^2$ | 22 | 32 | × | 12 | 61 | x→П A | 4— |
| 04 | П→x 1 | 61 | 33 | П→x 5 | 65 | 62 | П→x 1 | 61 |
| 05 | + | 10 | 34 | + | 10 | 63 | П→x A | 6— |
| 06 | x→П 1 | 41 | 35 | x→П 5 | 45 | 64 | П→x 4 | 64 |
| 07 | ←→ | 14 | 36 | П→x 8 | 68 | 65 | × | 12 |
| 08 | x→П A | 4— | 37 | F $x^2$ | 22 | 66 | — | 11 |
| 09 | ПП | 53 | 38 | П→x 2 | 62 | 67 | П→x B | 6L |
| 10 | 74 | 74 | 39 | + | 10 | 68 | П→x 5 | 65 |
| 11 | П→x 9 | 69 | 40 | x→П 2 | 42 | 69 | × | 12 |
| 12 | F $x^2$ | 22 | 41 | × | 12 | 70 | — | 11 |
| 13 | П→x 3 | 63 | 42 | — | 11 | 71 | П→x 6 | 66 |
| 14 | + | 10 | 43 | П→x 6 | 66 | 72 | : | 13 |
| 15 | x→П 3 | 43 | 44 | В/О | 52 | 73 | С/П | 50 |
| 16 | К П→x 6 | Г6 | 45 | ←→ | 14 | | | |
| 17 | П→x B | 6L | 46 | П→x 7 | 67 | | | |
| 18 | П→x 8 | 68 | 47 | F $x^2$ | 22 | | | |
| 19 | × | 12 | 48 | П→x 2 | 62 | | | |
| 20 | П→x 4 | 64 | 49 | П→x 3 | 63 | | | |
| 21 | + | 10 | 50 | × | 12 | | | |
| 22 | x→П 4 | 44 | 51 | — | 11 | | | |
| 23 | П→x 8 | 68 | 52 | : | 13 | | | |
| 24 | П→x 9 | 69 | 53 | x→П B | 4L | | | |
| 25 | × | 12 | 54 | П→x 4 | 64 | | | |
| 26 | П→x 7 | 67 | 55 | П→x B | 6L | | | |
| 27 | + | 10 | 56 | П→x 7 | 67 | | | |
| 28 | x→П 7 | 47 | 57 | × | 12 | | | |

Регистры

| | |
|---|---|
| 1 | $\Sigma y^2$ |
| 2 | $\Sigma \psi^2$ |
| 3 | $\Sigma \varphi^2$ |
| 4 | $\Sigma y\,\psi$ |
| 5 | $\Sigma y\,\varphi$ |
| 6 | n |
| 7 | $\Sigma \psi\varphi$ |
| 8; 9 | оперативные |
| A | $x_1$; a |
| B | $y_1$; b |

Программа IV.2.2/54

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | В/О | 52 | 26 | × | 12 | 52 | : | 13 |
| 01 | 8 | 08 | 27 | К П→х 0 | Г0 | 53 | х→П А | 4— |
| 02 | х→П 0 | 40 | 28 | + | 10 | 54 | × | 12 |
| 03 | П→х 7 | 67 | 29 | К х→ПВ ↑ | LE | 55 | П→х 6 | 66 |
| 04 | С/П | 50 | 30 | F . | 25 | 56 | ←→ | 14 |
| 05 | х→П А | 4— | 31 | В/О | 52 | 57 | — | 11 |
| 06 | 1 | 01 | 32 | П→х 3 | 63 | 58 | П→х В | 6L |
| 07 | ПП | 53 | 33 | П→х 4 | 64 | 59 | П→х 5 | 65 |
| 08 | 27 | 27 | 34 | П→х 5 | 65 | 60 | × | 12 |
| 09 | ←→ | 14 | 35 | × | 12 | 61 | — | 11 |
| 10 | ПП | 53 | 36 | П→х 3 | 63 | 62 | П→х 7 | 67 |
| 11 | 65 | 65 | 37 | П→х 1 | 61 | 63 | : | 13 |
| 12 | П→х 9 | 69 | 38 | × | 12 | 64 | С/П | 50 |
| 13 | П→х А | 6— | 39 | — | 11 | | Регистры | |
| 14 | ПП | 53 | 40 | П→х 4 | 64 | 0 | счетчик | |
| 15 | 22 | 22 | 41 | П→х 2 | 62 | 1 | $\Sigma\varphi\psi$ | |
| 16 | П→х А | 6— | 42 | × | 12 | 2 | $\Sigma\,\varphi^2$ | |
| 17 | П→х 8 | 68 | 43 | П→х 1 | 61 | 3 | $\Sigma\,\psi\,y$ | |
| 18 | ПП | 53 | 44 | F $x^2$ | 22 | 4 | $\Sigma\,\psi^2$ | |
| 19 | 22 | 22 | 45 | — | 11 | 5 | $\Sigma\,y\,\varphi$ | |
| 20 | П→х 8 | 68 | 46 | : | 13 | 6 | $\Sigma\,y^2$ | |
| 21 | П→х 9 | 69 | 47 | х→П В | 4L | 7 | n | |
| 22 | В ↑ | 0E | 48 | П→х 1 | 61 | 8 | $\psi_1$ | |
| 23 | F $x^2$ | 22 | 49 | × | 12 | 9 | $\varphi_1$ | |
| 24 | ПП | 53 | 50 | — | 11 | A | a | |
| 25 | 27 | 27 | 51 | П→х 4 | 64 | B | b | |

Для обеих программ используется единая инструкция.

Инструкция IV.2.2/54,52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Ввести программу и подпрограмму вычисления функций $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ | | | |
| 2. Очистить сумматоры | С | х→П 1<br>х→П 2<br>. . .<br>х→П 7 | 0<br>0<br>. . .<br>0 |
| 3. Перейти к началу программы | | В/О С/П | |
| 4. Занести очередную пару исходных данных | $x_i$<br>$y_i$ | В ↑<br>С/П | $x_i$<br>i |
| 5. Если данные исчерпаны, далее, иначе — к п. 4 | | | |
| 6. Вычислить a, b, $\sigma^2$:<br>а) для программы IV.2.2/54,52<br>б) для программы IV.2.2/54 | | <br>БП 45 С/П<br>БП 32 С/П | <br>$\sigma^2$—в рег. X<br>a —в рег. A<br>в —в рег. B |

Время ввода одной пары исходных данных — 15—20 с, время вычисления a, b, $\sigma^2$ — 11 с.

*Пример.* Сгладить функцией $y = ae^x + bx$ исходные данные $(x_i, y_i)$:

0; 0,5  1; 0,4  2; 1,7  3; 7  4; 23

Подпрограмма вычисления $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ имеет вид:

$x \rightarrow$ П 9 F $e^x$ $x \rightarrow$ П 8 В/О

Ответ: $a = 0{,}491$; $b = -0{,}958$; $\sigma^2 = 1{,}4 \cdot 10^{-4}$.

### IV.2.3. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ

Исходные данные сглаживаются степенной функцией

$$f = a \cdot x^b.$$

#### IV.2.3.1. МЕТОД ЛОГАРИФМИРОВАНИЯ

Для сглаживания исходных данных функцию $f = ax^b$ логарифмированием преобразуем к виду

$$z = \ln f = \ln a + b \ln x$$

и ищем величины a и b, соответствующие минимуму невязки

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [\ln y_i - \ln a - b \ln x_i]^2.$$

Расчеты проводятся по программе IV.2.1/54,52 со следующей инструкцией.

Инструкция IV.2.3.1/54,52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Перейти к началу программы | | В/О | |
| 2. Занести очередную пару исходных данных | $x_i$ | F ln | |
| | $y_i$ | F ln С/П | i |
| 3. Если данные исчерпаны, далее, нет — к п. 2 | | | |
| 4. Определить ln a, b, $\hat{\sigma}^2$ | | БП 39 С/П | ln a — в рег. X, A<br>b — в рег. Y, B<br>$\hat{\sigma}^2$ — в рег. 1 |
| 5. Определить a | | П→x A F $e^x$ | a |

Время ввода $x_i$, $y_i$ — 10 с, время вычисления a, в, $\sigma^2$ — 12 с.

*Пример.* Сгладить степенной функцией совокупность данных $(x_i, y_i)$:

2; 13  4; 8  7; 6  10; 2

Ответ: $a = 30{,}670$; $в = -1{,}037$; $\sigma^2 = 0{,}0737$.

Следует учитывать, что полученные значения a и b могут заметно отличаться от оптимальных, поскольку вес отклонения при больших значениях переменной при логарифмировании уменьшается.

### IV.2.3.2. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Для получения более точного решения можно использовать соотношения, полученные в [6]:

$$b_{j+1} = b_j + M/a_j;$$

$$a_{j+1} = 1/\sum x^{2b_j}\left[\sum_1 yx^{b_j} - M\sum x^{2b_j}\ln x\right];$$

$$M = \frac{\Sigma x^{2b_j}\ln x\,\Sigma yx^{b_j} - \Sigma yx^{b_j}\ln x\,\Sigma x^{2b_j}}{\left(\Sigma x^{2b_j}\ln x\right)^2 - \Sigma x^{2b_j}\ln^2 x\,\Sigma x^{2b_j}}.$$

Вычисление повторить несколько раз до тех пор, пока разница в значениях среднего квадрата ошибки двух последних расчетов не станет близкой нулю.

В качестве начального приближения $a_0$ и $b_0$ можно использовать решение, полученное выше с помощью логарифмирования.

Программа IV.2.3.2/54

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | В/О | 52 | 20 | П→х 3 | 63 | 40 | F . | 25 |
| 01 | 1 | 01 | 21 | F $x^2$ | 22 | 41 | В/О | 52 |
| 02 | 1 | 01 | 22 | ПП | 53 | 42 | П→х 6 | 66 |
| 03 | х→П 0 | 40 | 23 | 36 | 36 | 43 | П→х 9 | 69 |
| 04 | П→х 1 | 61 | 24 | ПП | 53 | 44 | П→х 8 | 68 |
| 05 | С/П | 50 | 25 | 34 | 34 | 45 | : | 13 |
| 06 | х→П 1 | 41 | 26 | ПП | 53 | 46 | В↑ | 0E |
| 07 | ←→ | 14 | 27 | 34 | 34 | 47 | П→х 5 | 65 |
| 08 | F ln | 18 | 28 | К П→х 4 | Г4 | 48 | × | 12 |
| 09 | х→П 2 | 42 | 29 | П→х 3 | 63 | 49 | П→х 6 | 66 |
| 10 | П→х В | 6L | 30 | П→х 1 | 61 | 50 | — | 11 |
| 11 | × | 12 | 31 | × | 12 | 51 | ←→ | 14 |
| 12 | F $e^x$ | 16 | 32 | ПП | 53 | 52 | П→х 7 | 67 |
| 13 | х→П 3 | 43 | 33 | 36 | 36 | 53 | × | 12 |
| 14 | П→х С | 6C | 34 | П→х 2 | 62 | 54 | П→х 8 | 68 |
| 15 | × | 12 | 35 | × | 12 | 55 | — | 11 |
| 16 | — | 11 | 36 | В↑ | 0E | 56 | : | 13 |
| 17 | F $x^2$ | 22 | 37 | К П→х 0 | Г0 | 57 | В↑ | 0E |
| 18 | ПП | 53 | 38 | + | 10 | 58 | П→х С | 6C |
| 19 | 37 | 37 | 39 | К х→П В↑ | LE | 59 | : | 13 |

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 60 | П→x B | 6L | 74 | 0 | 00 |
| 61 | + | 10 | 75 | x→П 0 | 40 |
| 62 | x→П B | 4L | 76 | Cx | 0Г |
| 63 | F . | 25 | 77 | K x→П B ↑ | LE |
| 64 | П→x 8 | 68 | 78 | F L0 | 5Г |
| 65 | × | 12 | 79 | 77 | 77 |
| 66 | — | 11 | 80 | ←→ | 14 |
| 67 | П→x 9 | 69 | 81 | x→П 1 | 41 |
| 68 | : | 13 | 82 | B/O | 52 |
| 69 | x→П C | 4C | | | |
| 70 | П→x A | 6— | | Регистры | |
| 71 | П→x 4 | 64 | | | |
| 72 | : | 13 | 0 | счетчик | |
| 73 | 1 | 01 | 1 | y; $\sigma^2$ | |

| | |
|---|---|
| 2 | ln x |
| 3 | $x^{B_j}$ |
| 4 | n |
| 5 | $\Sigma y x^{B_j} \ln x$ |
| 6 | $\Sigma y x^{B_j}$ |
| 7 | $\Sigma x^{2B_j} \ln^2 x$ |
| 8 | $\Sigma x^{2B_j} \ln x$ |
| 9 | $\Sigma x^{2B_j}$ |
| A | $\Sigma(y - a_j x^{B_j})^2$ |
| B | b |
| C | a |

Инструкция IV.2.3.2/54

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Очистить регистры | | БП 73 С/П | |
| 2. Занести начальные значения | $a_0$ | x→П C | $a_0$ |
| | $b_0$ | x→П B | $b_0$ |
| 3. Занести значения очередной пары исходных данных $x_i$, $y_i$ | $x_i$ | B ↑ | $x_i$ |
| | $y_i$ | С/П | $y_i$ |
| 4. Если данные исчерпаны, далее, нет — к п. 3 | | | |
| 5. Определить $\sigma_j^2$, $a_{j+1}$, $b_{j+1}$ | | БП 42 С/П | $\sigma_j^2$ — в рег. X, 1<br>$a_{j+1}$ — в рег. C<br>$b_{j+1}$ — в рег. B |
| 6. Для осуществления следующей итерации — к п. 3 | | | |

Время занесения и обработки каждой пары чисел — 23 с, время вычисления $\sigma_j^2$, $a_{j+1}$, $b_{j+1}$ — 23 с.

Программа IV.2.3.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | B/O | 52 | 06 | x→П 1 | 41 | 12 | F $e^x$ | 16 |
| 01 | 1 | 01 | 07 | ←→ | 14 | 13 | x→П 3 | 43 |
| 02 | 1 | 01 | 08 | F ln | 18 | 14 | П→x C | 6C |
| 03 | x→П 0 | 40 | 09 | x→П 2 | 42 | 15 | × | 12 |
| 04 | П→x 1 | 61 | 10 | П→x B | 6L | 16 | — | 11 |
| 05 | С/П | 50 | 11 | × | 12 | 17 | F $x^2$ | 22 |

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 18 | ПП | 53 | 49 | В↑ | 0E | 80 | x→П 7 | 47 |
| 13 | 37 | 37 | 50 | П→x 5 | 65 | 81 | x→П 6 | 46 |
| 20 | П→x 3 | 63 | 51 | × | 12 | 82 | x→П 5 | 45 |
| 21 | F $x^2$ | 22 | 52 | П→x 6 | 66 | 83 | x→П 4 | 44 |
| 22 | ПП | 53 | 53 | — | 11 | 84 | ←→ | 14 |
| 23 | 36 | 36 | 54 | ←→ | 14 | 85 | x→П 1 | 41 |
| 24 | ПП | 53 | 55 | П→x 7 | 67 | 86 | В/О | 52 |
| 25 | 34 | 34 | 56 | × | 12 | | | |
| 26 | ПП | 53 | 57 | П→x 8 | 68 | | Регистры | |
| 27 | 34 | 34 | 58 | — | 11 | | | |
| 28 | К П→x 4 | Г4 | 59 | : | 13 | 0 | счетчик | |
| 29 | П→x 3 | 63 | 60 | В↑ | 0E | 1 | y; $\sigma^2$ | |
| 30 | П→x 1 | 61 | 61 | П→x C | 6C | 2 | ln x | |
| 31 | × | 12 | 62 | : | 13 | 3 | $x^{в_j}$ | |
| 32 | ПП | 53 | 63 | П→x B | 6L | 4 | n | |
| 33 | 36 | 36 | 64 | + | 10 | 5 | $\Sigma\, y \cdot \ln x \cdot x^{в_j}$ | |
| 34 | П→x 2 | 62 | 65 | x→П B | 4L | 6 | $\Sigma\, y \cdot x^{в_j}$ | |
| 35 | × | 12 | 66 | F . | 25 | 7 | $\Sigma \ln^2 x \cdot x^{2в_j}$ | |
| 36 | В↑ | 0E | 67 | П→x 8 | 68 | 8 | $\Sigma\, x^{2в_j} \cdot \ln x$ | |
| 37 | К П→x 0 | Г0 | 68 | × | 12 | 9 | $\Sigma\, x^{2в_j}$ | |
| 38 | + | 10 | 69 | — | 11 | A | $\Sigma\, (y - a_j x^{в_j})^2$ | |
| 39 | П→x 0 | 60 | 70 | П→x 9 | 69 | B | $в_j$ | |
| 40 | x→П Д | 4Г | 71 | : | 13 | C | $a_j$ | |
| 41 | F . | 25 | 72 | x→П C | 4C | Д | оперативный | |
| 42 | К x→П Д | LГ | 73 | П→x A | 6— | | | |
| 43 | F . | 25 | 74 | П→x 4 | 64 | | | |
| 44 | В/О | 52 | 75 | : | 13 | | | |
| 45 | П→x 6 | 66 | 76 | 0 | 00 | | | |
| 46 | П→x 9 | 69 | 77 | x→П A | 4— | | | |
| 47 | П→x 8 | 68 | 78 | x→П 9 | 49 | | | |
| 48 | : | 13 | 79 | x→П 8 | 48 | | | |

Инструкция IV.2.3.2/54,52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Очистить регистры | | БП 76 С/П | |
| 2. Занести начальные значения $a_0$ и $b_0$ | $a_0$ | x→П C | |
| | $в_0$ | x→П B | |
| 3. Занести значения очередной пары исходных данных | $x_1$ | В↑ | |
| | $y_1$ | С/П | $y_1$ |
| 4. Если данные исчерпаны, далее, нет — к п. 3 | | | |
| 5. Определить $\sigma_j^2$, $a_{j+1}$, $в_{j+1}$ | | БП 45 С/П | $\sigma_j^2$—в рег. X, 1<br>$a_{j+1}$—в рег. C<br>$в_{j+1}$—в рег. B |
| 6. Для осуществления следующей итерации — к п. 3 | | | |

*Пример*. Сгладить степенной функцией $y = ax^b$ совокупность данных $(x_i, y_i)$:

0,6; 1,7  1; 3,2  1,5; 6  2; 10,

использовав в качестве начальных значений $a_0 = 1$, $b_0 = 1$. Ответ:

| j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sigma_j^2$ | 22,575 | 119,1954 | 8,0441 | 0,20948 | $3{,}532 \cdot 10^{-2}$ |
| $a_{j+1}$ | 3,35133 | 2,7587 | 3,0902 | 3,22102 | 3,2357 |
| $b_{j+1}$ | 3,20405 | 2,4775 | 1,7894 | 1,6223 | 1,6119 |

### IV.2.4. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

Исходные данные сглаживаются экспоненциальной функцией

$$f = ae^{bx}.$$

#### IV.2.4.1. МЕТОД ЛОГАРИФМИРОВАНИЯ

Для сглаживания исходных данных функцию $f = ae^{bx}$ логарифмированием преобразуем к виду

$$\ln f = \ln a + bx$$

и ищем величины a и b, соответствующие минимуму невязки

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [\ln y_i - \ln a - bx_i]^2.$$

Расчеты проводятся по программе IV.2.1/54,52 со следующей инструкцией.

Инструкция IV.2.4.1/54,52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Перейти к началу программы | | В/О | |
| 2. Занести очередную пару исходных данных | $x_i$<br>$y_i$ | В↑<br>F ln С/П | |
| 3. Если данные исчерпаны, далее, нет — к п. 2 | | | |
| 4. Определить ln a, b, $\sigma^2$ | | БП 39 С/П | ln a—в рег. X, A<br>в—в рег. Y, B<br>$\sigma^2$—в рег. 1 |
| 5. Определить a | | П→x A F $e^x$ | a |

Время ввода $x_1$, $y_1$ — 10 с, время вычисления a, в, $\sigma^2$ — 12 с.

*Пример.* Сгладить экспонентой совокупность данных ($x_1$, $y_1$):
0,6; 1,7  1; 3,2  1,5; 6  2; 10

Ответ: a = 0,854, в = 1,259, $\sigma^2 = 3{,}84 \cdot 10^{-3}$.

Если диапазон изменения исходных данных невелик, отличия полученных значений a и b от оптимальных незначительны.

### IV.2.4.2. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Для получения оптимального решения используются программы IV.2.3.2/54 или IV.2.3.2/54, 52 вместе с инструкциями к ним. Единственное отличие — команду F ln с адресом 08 следует заменить командой К НОП.

Расчетные формулы [7]:

$$b_{j+1} = b_j + M/a_j;$$

$$a_{j+1} = 1/\Sigma e^{2b_j x}\,[\Sigma y e^{b_j x} - M \Sigma x e^{2b_j x}];$$

$$M = \frac{\Sigma e^{2b_j x} \Sigma xy e^{b_j x} - \Sigma xe^{2b_j x} \Sigma ye^{b_j x}}{(\Sigma xe^{2b_j x})^2 - \Sigma e^{2b_j x} \Sigma x^2 e^{2b_j x}}.$$

*Пример.* Сгладить экспонентой совокупность данных ($x_1$, $y_1$):
0,6; 1,7  1; 3,2  1,5; 6  2; 10

Использовав в качестве начальных значения $a_0 = 0{,}854$ и $в_0 = 1{,}259$ из примера IV.2.4.1, продолжим вычисления по программе IV.2.3.2/54 или IV.2.3.2/54, 52.

Ответ:

| j | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $a_j$ | 0,854 | 1,007 | 1,011 | 1,011 |
| $b_j$ | 1,259 | 1,146 | 1,152 | 1,151 |
| $\sigma_j^2$ | 0,1322 | $5{,}962 \cdot 10^{-2}$ | $5{,}294 \cdot 10^{-2}$ | . . . |

## IV.2.5. ПРОИЗВОЛЬНАЯ НЕПРЕРЫВНАЯ ФУНКЦИЯ

### IV.2.5.1. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Для сглаживания опытных данных непрерывной и дифференцируемой по параметрам a и b функцией разложим эту функцию в ряд Тейлора в точке начального приближения $a_0$, $в_0$ и ограничимся линейными членами:

$$f(x, a, b) \approx f(x, a_0, b_0) + \Delta a f'_a(x, a_0, b_0) + \Delta b \cdot f'_b(x, a_0, b_0),$$

где $\Delta a = a - a_0$, $\Delta b = b - b_0$.

Для определения приращений решается система линейных уравнений, для чего вводится начальное приближение $a_0$, $b_0$ и затем пары чисел $x_1$, $y_1$. Вычисляется $\hat{\sigma}_j^2$ и следующее приближение параметров $a_j$ и $b_j$. Цикл «ввод данных-вычисление $\hat{\sigma}_j^2$, $a_j$, $b_j$» повторяется до тех пор, пока значение $\hat{\sigma}^2$ не установится.

Расчетные формулы:

$$\hat{\sigma}_j^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i, a_j\ b_j)]^2;\ a_{j+1} = a_j + \Delta a_j;\ b_{j+1} = b_j + \Delta b_j;$$

$$\Delta a_j = \frac{\sum f'_a f'_b \sum (f-y) f'_b - \sum (f'_b)^2 \sum (f-y) f'_a}{\sum (f'_a)^2 \sum (f'_b)^2 - (\sum f'_a \cdot f'_b)^2};$$

$$\Delta b_j = -\frac{1}{\sum f'_a f'_b} [\sum (f-y) f'_a + \Delta a_j \sum (f'_a)^2],$$

где f, $f'_a$ и $f'_b$ — сглаживающая функция и ее частные производные по a и b в точке $a = a_j$, $b = b_j$.

Пользователем должна быть составлена подпрограмма вычисления значений f, $f'_a$ и $f'_в$, размещаемая в памяти, начиная с адреса 71. Аргумент x берется из регистра X, значения $a_j$ — из регистра A, $b_j$ — из регистра B; ответы помещаются: $f'_a$ — в регистр 8, $f'_в$ — в регистр 9, f — в регистр X.

Программа IV.2.5.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | В/О | 52 | 21 | В↑ | 0E | 42 | — | 11 |
| 01 | 7 | 07 | 22 | F $x^2$ | 22 | 43 | П→х 0 | 60 |
| 02 | х→П 0 | 40 | 23 | ПП | 53 | 44 | П→х 2 | 62 |
| 03 | С/П | 50 | 24 | 27 | 27 | 45 | × | 12 |
| 04 | х→П С | 4C | 25 | П→х С | 6C | 46 | П→х 3 | 63 |
| 05 | ←→ | 14 | 26 | × | 12 | 47 | — | 11 |
| 06 | ПП | 53 | 27 | К П→х 0 | Г0 | 48 | : | 13 |
| 07 | 71 | 71 | 28 | + | 10 | 49 | х→П 0 | 40 |
| 08 | П→х С | 6C | 29 | П→х 0 | 60 | 50 | П→х А | 6— |
| 09 | — | 11 | 30 | х→П 7 | 47 | 51 | + | 10 |
| 10 | х→П С | 4C | 31 | F . | 25 | 52 | х→П А | 4— |
| 11 | ПП | 53 | 32 | К х→П 7 | L7 | 53 | П→х В | 6L |
| 12 | 25 | 25 | 33 | F . | 25 | 54 | П→х 0 | 60 |
| 13 | П→х 9 | 69 | 34 | В/О | 52 | 55 | П→х 2 | 62 |
| 14 | ПП | 53 | 35 | П→х 4 | 64 | 56 | × | 12 |
| 15 | 21 | 21 | 36 | П→х 5 | 65 | 57 | П→х 1 | 61 |
| 16 | П→х 8 | 68 | 37 | П→х 3 | 63 | 58 | + | 10 |
| 17 | П→х 9 | 69 | 38 | : | 13 | 59 | П→х 3 | 63 |
| 18 | ПП | 53 | 39 | х→П 0 | 40 | 60 | : | 13 |
| 19 | 26 | 26 | 40 | П→х 1 | 61 | 61 | — | 11 |
| 20 | П→х 8 | 68 | 41 | × | 12 | 62 | х→П В | 4L |

| Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|
| 63 | 7 | 07 |
| 64 | x→П 0 | 40 |
| 65 | Cx | 0Г |
| 66 | ПП | 53 |
| 67 | 29 | 29 |
| 68 | FL0 | 5Г |
| 69 | 65 | 65 |
| 70 | В/О | 52 |

Регистры

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | счетчик | 6 | $\Sigma f;\ \hat{\sigma}^2$ |
| 1 | $\Sigma (f-y)\ f'_a$ | 7 | оперативный |
| 2 | $\Sigma (f'_a)^2$ | 8 | $f'_a$ |
| 3 | $\Sigma f'_a \cdot f'_в$ | 9 | $f'_в$ |
| 4 | $\Sigma (f-y)\ f'_в$ | A | a |
| 5 | $\Sigma (f'_в)^2$ | B | в |
| | | C | y; (f—y) |

Инструкция IV.2.5.1/54,52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Ввести программу и подпрограмму вычисления функций f, $f'_a$, $f'_в$ | | | |
| 2. Занести начальное приближение параметров | $a_0$<br>$в_0$ | x→П A<br>БП 62 С/П | $a_0$<br>7 |
| 3. Занести значения очередной пары данных | $x_1$<br>$y_1$ | В↑<br>С/П | <br>7 |
| 4. Если данные исчерпаны, далее, нет — к п. 3 | | | |
| 5. Вывести $\hat{\sigma}^2_j$ | | П→x 6 | $\hat{\sigma}^2_j$ |
| 6. Вычислить очередные значения $a_{j+1}$ и $в_{j+1}$ | | БП 35 С/П | $a_{j+1}$—в рег. A<br>$в_{j+1}$—в рег. B |
| 7. Для выполнения следующей итерации — к п. 3 | | | |

Время занесения $a_0$ и $в_0$ — 7 с, время обработки пары чисел $x_1$, $y_1$ — (17 + τ) с, где τ — время работы подпрограммы. Время вычисления $a_{j+1}$ и $b_{j+1}$ — 15 с.

*Пример*. Сгладить совокупность данных ($x_1$, $y_1$):

0; 0,02 4; 0,8 8; 2 11; 4

(величина x задана в радианах) функцией f = atgbx. Принять $a_0$ = = 1, 8, $b_0$ = 0,1.

Частные производные функции f (x, a, b) равны $f'_a$ = tg bx, $f'_в$ = = ax/cos² bx. Подпрограмма имеет вид:

В↑П→x В× x→П 8 F cos Fx²:П→x A × x→П 9

П→x 8 F tg x→П 8 П→x A × В/О

Переключатель Р/Г поставить в положение Р.
Выполняя итерации, получим:

| i | a | b | $\hat{\sigma}^2$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1,8 | 0,1 | 0,2382 |
| 1 | 1,8045 | 0,1047 | $3{,}33\cdot10^{-3}$ |
| 2 | 1,8199 | 0,1040 | $4{,}22\cdot10^{-4}$ |
| 3 | 1,8204 | 0,1040 | $4{,}21\cdot10^{-4}$ |

### IV.2.5.2. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Исходная функция $y = y(x)$, заданная в n равноотстоящих узлах $x_i$ ($x_1 - x_{i-1} = \Delta x = \text{const}$, $i = 2, 3, \ldots, n$), аппроксимируется функцией $f(x, a, в)$ с двумя определяемыми параметрами a, в, минимизирующими величину невязки

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i, a, b) - y_i]^2.$$

Оптимизация параметров a, в производится методом последовательного приближения, который состоит в том, что на каждом $(j + 1)$-м шаге значения a и в изменяются совместно по правилу

$$a_{j+1} = a_{j,\min} + h_{j+1}\cdot\sin\varphi_{j+1},\quad b_{j+1} = b_{j,\min} + h_{j+1}\cdot\cos\varphi_{j+1},$$

где $a_{j,\min}$, $в_{j,\min}$ соответствуют минимальному значению невязки $\hat{\sigma}_j^2$ за j предыдущих шагов оптимизации. Значения $h_{j+1}$, $\varphi_{j+1}$ устанавливаются в зависимости от предыдущих значений $h_j$, $\varphi_j$, $\hat{\sigma}_j^2$: начальные значения: $h_0 = 0{,}05$, $\varphi_0 = 9$ рад; при $\hat{\sigma}_j^2 < \hat{\sigma}_{j-1}^2$ устанавливается $h_{j+1} = h_j\cdot\ln\pi$, $\varphi_{j+1} = \varphi_j$; при $\hat{\sigma}_j^2 \geqslant \hat{\sigma}_{j-1}^2$ устанавливается $h_{j+1} = h_j \times \ln 2$, $\varphi_{j+1} = \varphi_{j+1}$; при $h_j \simeq 2\cdot10^{-4}$ вычисление заканчивается.

Подпрограмма вычисления функции $f(x, a, в)$ размещается непосредственно за основной программой и заканчивается командой В/О. Значения x, a, в для вычисления $f(x, a, в)$ берутся соответственно из регистров X, A, B. Вычисленное значение $f(x, a, в)$ помещается в регистр X.

Приведены три программы вычисления оптимальных значений a, в: IV.2.5.2/54 (при $n \leqslant 5$), IV.2.5.2/52 (при $n \leqslant 5$) и IV.2.5.2′/52 (при $(n \leqslant 6)$.

При n, меньшем максимального значения, в программы следует внести изменения, заменив в п. 23 основной программы значение $n_{max}$ на используемое значение n.

Программы работают в радианах.

Программа IV.2.5.2/54

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | 9 | 09 | 28 | + | 10 | 56 | БП | 51 |
| 01 | x→П 6 | 46 | 29 | x→П 7 | 47 | 57 | 10 | 10 |
| 02 | F $10^x$ | 15 | 30 | 0 | 00 | 58 | В↑ | 0E |
| 03 | x→П С | 4С | 31 | x→П С | 4С | 59 | П→x 6 | 66 |
| 04 | F ln | 18 | 32 | П→x 7 | 67 | 60 | F cos | 1Г |
| 05 | F 1/x | 23 | 33 | П→x 8 | 68 | 61 | × | 12 |
| 06 | x→П 9 | 49 | 34 | — | 11 | 62 | П→x В | 6L |
| 07 | П→x С | 6С | 35 | x→П 7 | 47 | 63 | + | 10 |
| 08 | x→П Д | 4Г | 36 | ПП | 53 | 64 | x→П В | 4L |
| 09 | Fπ | 20 | 37 | 73 | 73 | 65 | ←→ | 14 |
| 10 | F ln | 18 | 38 | КП→xВ↑ | ГЕ | 66 | П→x 6 | 66 |
| 11 | П→x 9 | 69 | 39 | — | 11 | 67 | F sin | 1С |
| 12 | × | 12 | 40 | F $x^2$ | 22 | 68 | × | 12 |
| 13 | x→П 9 | 49 | 41 | П→x С | 6С | 69 | П→x А | 6— |
| 14 | F cos | 1Г | 42 | + | 10 | 70 | + | 10 |
| 15 | F $\cos^{-1}$ | 1— | 43 | F L0 | 5Г | 71 | x→П А | 4— |
| 16 | F x=0 | 5Е | 44 | 31 | 31 | 72 | В/О | 52 |
| 17 | 20 | 20 | 45 | x→П С | 4С | | | |
| 18 | П→x Д | 6Г | 46 | П→x Д | 6Г | | Регистры | |
| 19 | С/П | 50 | 47 | — | 11 | | | |
| 20 | П→x 9 | 69 | 48 | F x⩾0 | 59 | 0;6;С | оперативные | |
| 21 | ПП | 53 | 49 | 07 | 07 | 1—5 | $y_1$—$y_5$ | |
| 22 | 58 | 58 | 50 | П→x 9 | 69 | 7 | $x_1$ | |
| 23 | 5 | 05 | 51 | /—/ | 0L | 8 | $\Delta x$ | |
| 24 | x→П 0 | 40 | 52 | ПП | 53 | 9 | h | |
| 25 | П→x 8 | 68 | 53 | 58 | 58 | А | a | |
| 26 | × | 12 | 54 | К П→x 6 | Г6 | В | в | |
| 27 | П→x 7 | 67 | 55 | 2 | 02 | Д | $\hat{\sigma}^2$ | |

Программа IV.2.5.2/52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | 9 | 09 | 17 | F cos | 1Г | 34 | П→x 7 | 67 |
| 01 | x→П 6 | 46 | 18 | F $\cos^{-1}$ | 1— | 35 | П→x 8 | 68 |
| 02 | F $10^x$ | 15 | 19 | F x=0 | 5Е | 36 | — | 11 |
| 03 | x→П С | 4С | 20 | 23 | 23 | 37 | x→П 7 | 47 |
| 04 | F ln | 18 | 21 | П→x Д | 6Г | 38 | ПП | 53 |
| 05 | F 1/x | 23 | 22 | С/П | 50 | 39 | 75 | 75 |
| 06 | x→П 9 | 49 | 23 | 5 | 05 | 40 | К П→x Е | ГЕ |
| 07 | П→x С | 6С | 24 | x→П 0 | 40 | 41 | — | 11 |
| 08 | x→П Д | 4Г | 25 | П→x 8 | 68 | 42 | F $x^2$ | 22 |
| 09 | F π | 20 | 26 | × | 12 | 43 | П→x С | 6С |
| 10 | F ln | 18 | 27 | П→x 7 | 67 | 44 | + | 10 |
| 11 | П→x 9 | 69 | 28 | + | 10 | 45 | F L0 | 5Г |
| 12 | × | 12 | 29 | x→П 7 | 47 | 46 | 31 | 31 |
| 13 | x→П 9 | 49 | 30 | 0 | 00 | 47 | x→П С | 4С |
| 14 | ПП | 53 | 31 | x→П С | 4С | 48 | П→x Д | 6Г |
| 15 | 60 | 60 | 32 | П→x 0 | 60 | 49 | — | 11 |
| 16 | П→x 9 | 69 | 33 | x→П Е | 4Е | 50 | F x⩾0 | 59 |

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 51 | 07 | 07 | 63 | × | 12 |
| 52 | П→x 9 | 69 | 64 | П→x B | 6L |
| 53 | /—/ | 0L | 65 | + | 10 |
| 54 | ПП | 53 | 66 | x→П B | 4L |
| 55 | 60 | 60 | 67 | ←→ | 14 |
| 56 | К П→x 6 | Г6 | 68 | П→x 6 | 66 |
| 57 | 2 | 02 | 69 | F sin | 1C |
| 58 | БП | 51 | 70 | × | 12 |
| 59 | 10 | 10 | 71 | П→x A | 6— |
| 60 | B↑ | 0E | 72 | + | 10 |
| 61 | П→x 6 | 66 | 73 | x—П A | 4— |
| 62 | F cos | 1Г | 74 | B/O | 52 |

Регистры

| | |
|---|---|
| 0;6;C;E | оперативные |
| 1—5 | $y_1 - y_5$ |
| 7 | $x_1$ |
| 8 | $\Delta x$ |
| 9 | h |
| A | a |
| B | b |
| Д | $\hat{\sigma}^2$ |

Программа IV.2.5.2′/52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | 9 | 09 | 30 | 0 | 00 | 60 | 1 | 01 |
| 01 | x→П E | 4E | 31 | x→П C | 4C | 61 | + | 10 |
| 02 | F10$^x$ | 15 | 32 | П→x 7 | 67 | 62 | x→П E | 4E |
| 03 | x→П C | 4C | 33 | П→x 8 | 68 | 63 | 2 | 02 |
| 04 | F ln | 18 | 34 | — | 11 | 64 | БП | 51 |
| 05 | F 1/x | 23 | 35 | x→П 7 | 47 | 65 | 10 | 10 |
| 06 | x→П 9 | 49 | 36 | ПП | 53 | 66 | B↑ | 0E |
| 07 | П→x C | 6C | 37 | 81 | 81 | 67 | П→x E | 6E |
| 08 | x→П Д | 4Г | 38 | П→x 0 | 60 | 68 | F cos | 1Г |
| 09 | F π | 20 | 39 | 1 | 01 | 69 | × | 12 |
| 10 | F ln | 18 | 40 | + | 10 | 70 | П→x B | 6L |
| 11 | П→x 9 | 69 | 41 | x→П 0 | 40 | 71 | + | 10 |
| 12 | × | 12 | 42 | ←→ | 14 | 72 | x→П B | 4L |
| 13 | x→П 9 | 49 | 43 | К П→x 0 | Г0 | 73 | ←→ | 14 |
| 14 | F cos | 1Г | 44 | — | 11 | 74 | П→x E | 6E |
| 15 | F cos$^{-1}$ | 1— | 45 | F x$^2$ | 22 | 75 | F sin | 1C |
| 16 | F x=0 | 5E | 46 | П→x C | 6C | 76 | × | 12 |
| 17 | 20 | 20 | 47 | + | 10 | 77 | П→x A | 6— |
| 18 | П→x Д | 6Г | 48 | F L0 | 5Г | 78 | + | 10 |
| 19 | C/П | 50 | 49 | 31 | 31 | 79 | x→П A | 4— |
| 20 | П→x 9 | 69 | 50 | x→П C | 4C | 80 | B/O | 52 |
| 21 | ПП | 53 | 51 | П→x Д | 6Г | | | |
| 22 | 66 | 66 | 52 | — | 11 | | | |
| 23 | 6 | 06 | 53 | F x≥0 | 59 | | | |
| 24 | x→П 0 | 40 | 54 | 07 | 07 | | | |
| 25 | П→x 8 | 68 | 55 | П→x 9 | 69 | | | |
| 26 | × | 12 | 56 | /—/ | 0L | | | |
| 27 | П→x 7 | 67 | 57 | ПП | 53 | | | |
| 28 | + | 10 | 58 | 66 | 66 | | | |
| 29 | x→П 7 | 47 | 59 | П→x E | 6E | | | |

Регистры

| | |
|---|---|
| 0,C,E | оперативные |
| 1—6 | $y_1 - y_6$ |
| 7 | $x_1$ |
| 8 | $\Delta x_1$ |
| 9 | h |
| A | a |
| B | b |
| Д | $\hat{\sigma}^2$ |

Для трех программ используется единая инструкция.

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Ввести программу и подпрограмму вычисления f (x, a, b) | | | |
| 2. Если n меньше максимального значения, занести в адрес 23 основной программы требуемое значение n | | | |
| 3. Переключатель Р/Г поставить в положение Р | | | |
| 4. Занести в регистры памяти значения $x_1$, $\Delta x$, $y_1 - y_n$ | $x_1$ | x→П 7 | $x_1$ |
| | $\Delta x$ | x→П 8 | $\Delta x$ |
| | $y_1$ | x→П 1 | $y_1$ |
| | . . . . . | . . . . . | . . . . . |
| | $y_n$ | x→П n | $y_n$ |
| 5. Занести начальные значения $a_0$ и $b_0$ в регистры памяти | $a_0$ | x→П A | $a_0$ |
| | $в_0$ | x→П B | $в_0$ |
| 6. Вычислить конечные значения a, b и $\hat{\sigma}^2$ | | В/О С/П | $\sigma^2$ — в рег. X, Д<br>a — в рег. A<br>в — в рег. B |

Время вычисления при n = 5 составляет 2—6 ч.

*Пример.* Вычислить оптимальные значения a, в при аппроксимации исходной функции y (x), заданной в четырех узлах:

$$x_1 = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

$$y_1 = 4{,}95 \quad 8{,}15 \quad 13{,}45 \quad 22{,}17$$

функцией вида f (x, a, в) = a·exp (x/в) и начальных значениях $a_0 = 2{,}8$ и $в_0 = 2{,}1$.

Решение. Подпрограмма вычисления значений аппроксимирующей функции f (x, a, в) имеет вид П → x B : $Fe^x$ П → xA × В/О

Занести в адрес 23 основной программы значение n = 4.

Переключатель Р/Г поставить в положение Р.

Занести значения $x_1$, $\Delta x$, $y_1 - y_4$ в регистры памяти согласно схеме заполнения регистров.

Занести начальные значения $a_0 = 2{,}8$ и $в_0 = 2{,}1$ в регистры памяти A и B соответственно и запустить программу на счет.

Ответ: $a = 2{,}962$, $в = 1{,}986$, $\hat{\sigma}^2 = 6{,}12 \cdot 10^{-3}$, $h = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$.

Время вычисления примера — 2 ч.

## IV.3. СГЛАЖИВАНИЕ ФУНКЦИЕЙ С ТРЕМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

### IV.3.1. ПАРАБОЛА

Совокупность пар исходных данных $x_i$, $y_i$ сглаживается параболой $f = ax^2 + bx + c$.

Неизвестные параметры a, в и c определяются из системы уравнений

$$a\Sigma x^4 + b\Sigma x^3 + c\Sigma x^2 = \Sigma x^2 y,$$
$$a\Sigma x^3 + b\Sigma x^2 + c\Sigma x = \Sigma xy,$$
$$a\Sigma x^2 + b\Sigma x + cn = \Sigma y.$$

Программа IV.3.1/54

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | В/О | 52 | 33 | П→х 8 | 68 | 66 | × | 12 |
| 01 | С/П | 50 | 34 | : | 13 | 67 | П→х 1 | 61 |
| 02 | х→П 2 | 42 | 35 | х→П 2 | 42 | 68 | : | 13 |
| 03 | ←→ | 14 | 36 | К ПП Д | —Г | 69 | — | 11 |
| 04 | х→П 3 | 43 | 37 | х→П 1 | 41 | 70 | П→х 4 | 64 |
| 05 | 1 | 01 | 38 | П→х 4 | 64 | 71 | : | 13 |
| 06 | 2 | 02 | 39 | П→х В | 6L | 72 | х→П 0 | 40 |
| 07 | х→П 0 | 40 | 40 | П→х 2 | 62 | 73 | П→х В | 6L |
| 08 | К П→х 4 | Г4 | 41 | П→х А | 6— | 74 | К ПП Д | —Г |
| 09 | 4 | 04 | 42 | К ПП Д | —Г | 75 | П→х 1 | 61 |
| 10 | х→П 1 | 41 | 43 | х→П В | 4L | 76 | : | 13 |
| 11 | П→х 3 | 63 | 44 | F $x^2$ | 22 | 77 | х→П 1 | 41 |
| 12 | ПП | 53 | 45 | П→х 1 | 61 | 78 | П→х 5 | 65 |
| 13 | 14 | 14 | 46 | : | 13 | 79 | П→х 8 | 68 |
| 14 | В↑ | 0E | 47 | — | 11 | 80 | : | 13 |
| 15 | К П→х 0 | Г0 | 48 | П→х А | 6— | 81 | П→х 2 | 62 |
| 16 | + | 10 | 49 | П→х А | 6— | 82 | П→х 1 | 61 |
| 17 | Кх→ПВ↑ | LE | 50 | П→х 8 | 68 | 83 | К ПП Д | —Г |
| 18 | ←→ | 14 | 51 | : | 13 | 84 | П→х 3 | 63 |
| 19 | П→х 3 | 63 | 52 | х→П 3 | 43 | 85 | П→х 0 | 60 |
| 20 | × | 12 | 53 | К ПП Д | —Г | 86 | × | 12 |
| 21 | F L1 | 5L | 54 | х→П 4 | 44 | 87 | — | 11 |
| 22 | 14 | 14 | 55 | П→х 6 | 66 | 88 | х→П С | 4C |
| 23 | 3 | 03 | 56 | П→х 2 | 62 | 89 | В/О | 52 |
| 24 | х→П 1 | 41 | 57 | П→х 5 | 65 | 90 | Сх | 0Г |
| 25 | П→х 2 | 62 | 58 | К ПП Д | —Г | 91 | 1 | 01 |
| 26 | В/О | 52 | 59 | х→П 6 | 46 | 92 | 2 | 02 |
| 27 | 8 | 08 | 60 | П→х 7 | 67 | 93 | х→П 0 | 40 |
| 28 | 6 | 06 | 61 | П→х 3 | 63 | 94 | Сх | 0Г |
| 29 | х→П Д | 4Г | 62 | П→х 5 | 65 | 95 | Кх→ПВ↑ | LE |
| 30 | П→х А | 6— | 63 | К ПП Д | —Г | 96 | F L0 | 5Г |
| 31 | П→х 9 | 69 | 64 | П→х 6 | 66 | 97 | 95 | 95 |
| 32 | П→х 9 | 69 | 65 | П→х В | 6L | | | |

Регистры:

0 счетчик; c 2 $y_i$ 4 i; n 6 $\Sigma xy$ 8 $\Sigma x^4$ A $\Sigma x^2$ C a

1 счетчик; b 3 $x_i$ 5 $\Sigma x^2 y$ 7 $\Sigma y$ 9 $\Sigma x^3$ B $\Sigma x$ Д 86

Инструкция IV.3.1/54

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Очистить сумматоры | | БП 90 С/П | 0 |
| 2. Занести числа очередной пары исходных данных | $x_1$<br>$y_1$ | В↑<br>С/П | $x_1$<br>$y_1$ |
| 3. Если данные исчерпаны, далее, нет — к п. 2 | | | |
| 4. Определить a, b, c | | БП 27 С/П | a — в рег. X, C<br>b — в рег. 1<br>c — в рег. 0 |

Программа IV.3.1/52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | В/О | 52 | 34 | П→х 9 | 69 | 68 | П→х 2 | 62 |
| 01 | С/П | 50 | 35 | : | 13 | 69 | : | 13 |
| 02 | х→П 3 | 43 | 36 | х→П 3 | 43 | 70 | — | 11 |
| 03 | ←→ | 14 | 37 | К ПП Д | —Г | 71 | П→х 5 | 65 |
| 04 | х→П 4 | 44 | 38 | х→П 2 | 42 | 72 | : | 13 |
| 05 | 1 | 01 | 39 | П→х 5 | 65 | 73 | х→П 1 | 41 |
| 06 | 3 | 03 | 40 | П→х С | 6С | 74 | П→х С | 6С |
| 07 | х→П 0 | 40 | 41 | П→х 3 | 63 | 75 | К ПП Д | —Г |
| 08 | х→П 2 | 42 | 42 | П→х В | 6L | 76 | П→х 2 | 62 |
| 09 | К П→х 5 | Г5 | 43 | К ПП Д | —Г | 77 | : | 13 |
| 10 | 4 | 04 | 44 | х→П С | 4С | 78 | х→П 2 | 42 |
| 11 | х→П 1 | 41 | 45 | $Fx^2$ | 22 | 79 | П→х 6 | 66 |
| 12 | П→х 4 | 64 | 46 | П→х 2 | 62 | 80 | П→х 9 | 69 |
| 13 | ПП | 53 | 47 | : | 13 | 81 | : | 13 |
| 14 | 15 | 15 | 48 | — | 11 | 82 | П→х 3 | 63 |
| 15 | В↑ | 0Е | 49 | П→х В | 6L | 83 | П→х 2 | 62 |
| 16 | К П→х 0 | Г0 | 50 | П→х В | 6L | 84 | К ПП Д | —Г |
| 17 | + | 10 | 51 | П→х 9 | 69 | 85 | П→х 4 | 64 |
| 18 | К х→П 2 | L2 | 52 | : | 13 | 86 | П→х 1 | 61 |
| 19 | ←→ | 14 | 53 | х→П 4 | 44 | 87 | × | 12 |
| 20 | П→х 4 | 64 | 54 | К ПП Д | —Г | 88 | — | 11 |
| 21 | × | 12 | 55 | х→П 5 | 45 | 89 | х→П Е | 4Е |
| 22 | F L1 | 5L | 56 | П→х 7 | 67 | 90 | В/О | 52 |
| 23 | 15 | 15 | 57 | П→х 3 | 63 | 91 | Сх | 0Г |
| 24 | 3 | 03 | 58 | П→х 6 | 66 | 92 | х→П 5 | 45 |
| 25 | х→П 1 | 41 | 59 | К ПП Д | —Г | 93 | х→П 6 | 46 |
| 26 | П→х 3 | 63 | 60 | х→П 7 | 47 | 94 | х→П 7 | 47 |
| 27 | В/О | 52 | 61 | П→х 8 | 68 | 95 | х→П 8 | 48 |
| 28 | 8 | 08 | 62 | П→х 4 | 64 | 96 | х→П 9 | 49 |
| 29 | 7 | 07 | 63 | П→х 6 | 66 | 97 | х→П А | 4— |
| 30 | х→П Д | 4Г | 64 | К ПП Д | —Г | 98 | х→П В | 4L |
| 31 | П→х В | 6L | 65 | П→х 7 | 67 | 99 | х→П С | 4С |
| 32 | П→х А | 6— | 66 | П→х С | 6С | 100 | В/О | 52 |
| 33 | П→х А | 6— | 67 | × | 12 | | | |

Регистры:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | счетчик; c | 5 | i; n | A | $\Sigma x^3$ |
| 1 | счетчик; b | 6 | $\Sigma x^2 y$ | B | $\Sigma x^2$ |
| 2 | счетчик; | 7 | $\Sigma xy$ | C | $\Sigma x$; a |
| 3 | $y_i$ | 8 | $\Sigma y$ | Д | 87 |
| 4 | $x_i$ | 9 | $\Sigma x^4$ | | |

Инструкция IV.3.1/52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Очистить сумматоры | | БП 91 С/П | 0 |
| 2. Занести числа очередной пары исходных данных | $x_1$<br>$y_1$ | В↑<br>С/П | $x_1$<br>$y_1$ |
| 3. Если данные исчерпаны, далее, нет — к п. 2 | | | |
| 4. Определить a, b, c | | БП 28 С/П | a — в рег. X, E<br>b — в рег. 2<br>c — в рег. 1 |

Время занесения и обработки каждой пары чисел — 25 — 30 с, время вычисления параметров a, в, c — 33 с.

*Пример.* Сгладить параболой совокупность данных ($x_1$, $y_1$):

1; 2,718 1,5; 4,482 2; 7,389 3; 20,085

Ответ: a = 3,856, b = — 6,801, c = 5,758.

### IV.3.2. ФУНКЦИЯ, ЛИНЕЙНО ЗАВИСЯЩАЯ ОТ ПАРАМЕТРОВ

Совокупность пар опытных данных $x_1$, $y_1$ сглаживается функцией $f = a\psi(x) + b\varphi(x) + c$, где $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ полностью известны. Параметры a, b, c определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} a\,\Sigma\psi^2 + b\Sigma\psi\varphi + c\,\Sigma\psi = \Sigma\, y\,\psi, \\ a\,\Sigma\psi\varphi + b\,\Sigma\varphi^2 + c\,\Sigma\varphi = \Sigma\, y\,\varphi, \\ a\,\Sigma\psi + b\Sigma\,\varphi + cn = \Sigma\, y. \end{cases}$$

Программа IV.3.2/54

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | В/О | 52 | 33 | П→х В | 6L | 66 | × | 12 |
| 01 | С/П | 50 | 34 | : | 13 | 67 | П→х 9 | 69 |
| 02 | 1 | 01 | 35 | х→П 8 | 48 | 68 | : | 13 |
| 03 | 4 | 04 | 36 | К ПП С | —С | 69 | — | 11 |
| 04 | х→П 0 | 40 | 37 | х→П 9 | 49 | 70 | П→х 4 | 64 |
| 05 | К П→х 4 | Г4 | 38 | П→х 4 | 64 | 71 | : | 13 |
| 06 | П→х 1 | 61 | 39 | П→х А | 6— | 72 | х→П 2 | 42 |
| 07 | ПП | 53 | 40 | П→х 8 | 68 | 73 | П→х А | 6— |
| 08 | 13 | 13 | 41 | П→х Д | 6Г | 74 | К ПП С | —С |
| 09 | П→х 2 | 62 | 42 | К ПП С | —С | 75 | П→х 9 | 69 |
| 10 | ПП | 53 | 43 | х→П А | 4— | 76 | : | 13 |
| 11 | 13 | 13 | 44 | F $x^2$ | 22 | 77 | П→х 5 | 65 |
| 12 | С/П | 50 | 45 | П→х 9 | 69 | 78 | П→х В | 6L |
| 13 | В↑ | 0Е | 46 | : | 13 | 79 | : | 13 |
| 14 | ПП | 53 | 47 | — | 11 | 80 | ←→ | 14 |
| 15 | 21 | 21 | 48 | П→х Д | 6Г | 81 | х→П 1 | 41 |
| 16 | П→ 2 | 62 | 49 | П→х Д | 6Г | 82 | П→х 8 | 68 |
| 17 | ПП | 53 | 50 | П→х В | 6L | 83 | К ПП С | —С |
| 18 | 20 | 20 | 51 | : | 13 | 84 | П→х Д | 6Г |
| 19 | П→х 1 | 61 | 52 | х→П Д | 4Г | 85 | П→х 2 | 62 |
| 20 | × | 12 | 53 | К ПП С | —С | 86 | × | 12 |
| 21 | К П→х 0 | Г0 | 54 | х→П 4 | 44 | 87 | — | 11 |
| 22 | + | 10 | 55 | П→х 6 | 66 | 88 | х→П 0 | 40 |
| 23 | К х→П В↑ | LE | 56 | П→х 8 | 68 | 89 | В/О | 52 |
| 24 | ←→ | 14 | 57 | П→х 5 | 65 | 90 | Сх | 0Г |
| 25 | В↑ | 0Е | 58 | К ПП С | —С | 91 | 1 | 01 |
| 26 | В/О | 52 | 59 | х→П 1 | 41 | 92 | 3 | 03 |
| 27 | 8 | 08 | 60 | П→х 7 | 67 | 93 | х→П 0 | 40 |
| 28 | 6 | 06 | 61 | П→х Д | 6Г | 94 | Сх | 0Г |
| 29 | х→П С | 4С | 62 | П→х 5 | 65 | 95 | К х→П В↑ | LE |
| 30 | П→х 9 | 69 | 63 | К ПП С | —С | 96 | F L0 | 5Г |
| 31 | П→х 8 | 68 | 64 | П→х 1 | 61 | 97 | 95 | 95 |
| 32 | П→х 8 | 68 | 65 | П→х А | 6— | | | |

Регистры:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 счетчик; а | 6 | $\Sigma y\varphi$; | $\Sigma yz$ | В | $\Sigma\psi^2$; $\Sigma x^2$ |
| 1 x; ψ; b | 7 | $\Sigma y$; | $\Sigma z$ | С | $\Sigma\psi\varphi$; $\Sigma xy$; 87 |
| 2 x; φ; y; c | 8 | $\Sigma\psi\varphi$; | $\Sigma xy$ | Д | $\Sigma\psi$; $\Sigma x$ |
| 4 i; n | 9 | $\Sigma\varphi^2$; | $\Sigma y^2$ | | |
| 5 $\Sigma y\psi$; $\Sigma xz$ | А | $\Sigma\varphi$; | $\Sigma y$ | | |

Инструкция IV.3.2/54

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Очистить сумматоры | | БП 90 С/П | 0 |
| 2. Вычислить $\psi(x_1)$ в режиме калькулятора и занести | $\psi(x_1)$ | x→П 1 | $\psi(x_1)$ |
| 3. Вычислить $\varphi(x_1)$ в режиме калькулятора и занести | $\varphi(x_1)$ | x→П 2 С/П | $\varphi(x_1)$ |
| 4. Занести $y_1$ | $y_1$ | С/П | |
| 5. Если исходные данные исчерпаны, далее, нет — к п. 2 | | | |
| 6. Определить значения параметров a, b, c | | БП 27 С/П | a — в рег. X, 0<br>b — в рег. 1<br>c — в рег. 2 |

Программа IV.3.2/52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | В/О | 52 | 34 | П→х В | 6L | 68 | П→х 9 | 69 |
| 01 | С/П | 50 | 35 | : | 13 | 69 | : | 13 |
| 02 | 1 | 01 | 36 | х→П 8 | 48 | 70 | — | 11 |
| 03 | 4 | 04 | 37 | К ПП С | —С | 71 | П→х 4 | 64 |
| 04 | х→П 0 | 40 | 38 | х→П 9 | 49 | 72 | : | 13 |
| 05 | х→П .3 | 43 | 39 | П→х 4 | 64 | 73 | х→П 2 | 42 |
| 06 | К П→х 4 | Г4 | 40 | П→х А | 6— | 74 | П→х А | 6— |
| 07 | П→х 1 | 61 | 41 | П→х 8 | 68 | 75 | К ПП С | —С |
| 08 | ПП | 53 | 42 | П→х Д | 6Г | 76 | П→х 9 | 69 |
| 09 | 14 | 14 | 43 | К ПП С | —С | 77 | : | 13 |
| 10 | П→х 2 | 62 | 44 | х→П А | 4— | 78 | П→х 5 | 65 |
| 11 | ПП | 53 | 45 | F $x^2$ | 22 | 79 | П→х В | 6L |
| 12 | 14 | 14 | 46 | П→х 9 | 69 | 80 | : | 13 |
| 13 | С/П | 50 | 47 | : | 13 | 81 | ←→ | 14 |
| 14 | В↑ | 0E | 48 | — | 11 | 82 | х→П 1 | 41 |
| 15 | ПП | 53 | 49 | П→х Д | 6Г | 83 | П→х 8 | 68 |
| 16 | 22 | 22 | 50 | П→х Д | 6Г | 84 | К ПП С | —С |
| 17 | П→х 2 | 62 | 51 | П→х В | 6L | 85 | П→х Д | 6Г |
| 18 | ПП | 53 | 52 | : | 13 | 86 | П→х 2 | 62 |
| 19 | 21 | 21 | 53 | х→П Д | 4Г | 87 | × | 12 |
| 20 | П→х 1 | 61 | 54 | К ПП С | —С | 88 | — | 11 |
| 21 | × | 12 | 55 | х→П 4 | 44 | 89 | х→П 0 | 40 |
| 22 | К П→х 0 | Г0 | 56 | П→х 6 | 66 | 90 | В/О | 52 |
| 23 | + | 10 | 57 | П→х 8 | 68 | 91 | Сх | 0Г |
| 24 | К х→П 3 | L3 | 58 | П→х 5 | 65 | 92 | 1 | 01 |
| 25 | ←→ | 14 | 59 | К ПП С | —С | 93 | 4 | 04 |
| 26 | В↑ | 0E | 60 | х→П 1 | 41 | 94 | х→П 0 | 40 |
| 27 | В/О | 52 | 61 | П→х 7 | 67 | 95 | х→П 1 | 41 |
| 28 | 8 | 08 | 62 | П→х Д | 6Г | 96 | Сх | 0Г |
| 29 | 7 | 07 | 63 | П→х 5 | 65 | 97 | К х→П 1 | L1 |
| 30 | х→П С | 4C | 64 | К ПП С | —С | 98 | F L0 | 5Г |
| 31 | П→х 9 | 69 | 65 | П→х 1 | 61 | 99 | 97 | 97 |
| 32 | П→х 8 | 68 | 66 | П→х А | 6— | 100 | В/О | 52 |
| 33 | П→х 8 | 68 | 67 | × | 12 | | | |

Регистры:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0 счетчик; a | 5 $\Sigma y\psi$; | $\Sigma xz$ | A $\Sigma\varphi$; | $\Sigma y$ |
| 1 x; $\psi$; b | 6 $\Sigma y\varphi$; | $\Sigma yz$ | B $\Sigma\psi^2$; | $\Sigma x^2$ |
| 2 x; $\varphi$; y; c | 7 $\Sigma y$; | $\Sigma z$ | C $\Sigma\psi\varphi$; | $\Sigma xy$; 87 |
| 3 счетчик; | 8 $\Sigma\psi\varphi$; | $\Sigma xy$ | Д $\Sigma\psi$; | $\Sigma x$ |
| 4 i; n | 9 $\Sigma\varphi^2$ | $\Sigma y^2$ | | |

Инструкция IV.3.2./52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Очистить сумматоры | | БП 91 С/П | 0 |
| 2. Вычислить $\psi(x_1)$ в режиме калькулятора и занести | $\psi(x_1)$ | x→П 1 | $\psi(x_1)$ |
| 3. Вычислить $\varphi(x_1)$ в режиме калькулятора и занести | $\varphi(x_1)$ | x→П 2 С/П | $\varphi(x_1)$ |
| 4. Занести $y_1$ | $y_1$ | С/П | $y_1$ |
| 5. Если исходные данные исчерпаны, далее, нет — к п. 2 | | | |
| 6. Определить значения параметров a, b, c | | БП 28 С/П | a — в рег. X, 0<br>b — в рег. 1<br>c — в рег. 2 |

Время очистки сумматоров — 14 с, время занесения $\psi(x_1)$ и $\varphi(x_1)$ — 22 с, занесения $y_1$ — 9 с, вычисления a, b и c — 35 с.

*Пример.* Сгладить функцией $f = a/x + b \ln x + c$ ($\psi(x) = 1/x$, $\varphi(x) = \ln x$) совокупность исходных данных ($x_1$, $y_1$):

0,1; 3  0,2; — 0,7  1; — 1,5  1,5; — 1

Ответ: a = 1,0255, b = 2,0559, c = — 2,5208.

### IV.3.3. ПЛОСКОСТЬ

Совокупность данных $x_1$, $y_1$, $z_1$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) сглаживается плоскостью $z = ax + by + c$. Параметры плоскости определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} a\Sigma x^2 + b\Sigma xy + c\Sigma x = \Sigma xz, \\ a\Sigma xy + b\Sigma y^2 + c\Sigma y = \Sigma yz, \\ a\Sigma x + b\Sigma y + c \cdot n = \Sigma z. \end{cases}$$

Для вычислений используются программы IV.3.2/54 и IV.3.2/52, но с другими инструкциями, соответственно IV.3.3/54 и IV.3.3/52.

Инструкция IV.3.3/54

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Очистить сумматоры | | БП 90 С/П | 0 |
| 2. Занести числа очередной группы исходных данных | $x_1$ | x→П 1 | $x_1$ |
| | $y_1$ | x→П 2 С/П | $y_1$ |
| | $z_1$ | С/П | $z_1$ |
| 3. Если данные исчерпаны, далее. нет — к п. 2 | | | |
| 4. Определить значения неизвестных параметров a, b, c | | БП 27 С/П | a — в рег. X, 0<br>b — в рег. 1<br>c — в рег. 2 |

Инструкция IV.3.3/52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Очистить сумматоры | | БП 91 С/П | 0 |
| 2. Занести числа очередной группы исходных данных | $x_1$ | x→П 1 | $x_1$ |
| | $y_1$ | x→П 2 С/П | $y_1$ |
| | $z_1$ | С/П | $z_1$ |
| 3. Если данные исчерпаны, далее, нет — к п. 2 | | | |
| 4. Определить значения неизвестных параметров a, b, c | | БП 28 С/П | a — в рег. X, 0<br>b — в рег. 1<br>c — в рег. 2 |

Время очистки сумматоров — 14 с, время занесения исходных данных — 31 с, время вычисления параметров a, b, c — 35 с.

*Пример.* Сгладить плоскостью совокупность данных ($x_1$, $y_1$, $z_1$): 0,1; 1,1; 5,1 1; 1,2; 5;9 0,9; — 0,1; 3,9 2; 3,1; 10,5

Ответ: a = 1,035, b = 1,715, c = 3,042.

### IV.3.4. ПРОИЗВОЛЬНАЯ НЕПРЕРЫВНАЯ ФУНКЦИЯ

Исходная функция y (x), заданная в n равноотстоящих узлах $x_i$ ($x_i - x_{i-1} = \Delta x = \text{const}$, i = 2, 3, ..., n), сглаживается произвольной аппроксимирующей функцией f (x, a, в, c) методом последовательного приближения. Подпрограмма вычисления f (x, a, в, c) располагается непосредственно за основной программой и заканчивается командой В/О. Для вычисления f (x, a, в, c) значения x, a, в, c берутся соответственно из регистров X, A, B, C. Вычисленное значение f (x, a, в, c) помещается в регистр X.

Приводятся две программы IV.3.4./54 (при $n \leqslant 5$) и IV.3.4./52 (при $n \leqslant 6$) вычисления оптимальных значений a, в, c, минимизирующих невязку

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i, a, b, c) - y_i]^2.$$

При использовании n, не равном максимальному значению, в адресе 38 основной программы следует занести требуемое значение n. Переключатель Р/Г следует установить либо в положение Г — для грубой оценки a, в, c, либо в положение Р — для более точной оценки.

Программа IV.3.4/54

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | 9 | 09 | 27 | П→х 9 | 69 | 54 | — | 11 |
| 01 | F $10^x$ | 15 | 28 | /—/ | 0L | 55 | F $x^2$ | 22 |
| 02 | х→П Д | 4Г | 29 | 2 | 02 | 56 | П→х 6 | 66 |
| 03 | П→х 9 | 69 | 30 | : | 13 | 57 | + | 10 |
| 04 | П→х А | 6— | 31 | х→П 9 | 49 | 58 | F L0 | 5Г |
| 05 | + | 10 | 32 | F cos | 1Г | 59 | 46 | 46 |
| 06 | х→П А | 4— | 33 | F $\cos^{-1}$ | 1— | 60 | П→х Д | 6Г |
| 07 | ПП | 53 | 34 | F x=0 | 5E | 61 | ←→ | 14 |
| 08 | 38 | 38 | 35 | 03 | 03 | 62 | х→П Д | 4Г |
| 09 | F x<0 | 5C | 36 | П→х Д | 6Г | 63 | — | 11 |
| 10 | 03 | 03 | 37 | С/П | 50 | 64 | П→х 9 | 69 |
| 11 | П→х 9 | 69 | 38 | 5 | 05 | 65 | 3 | 03 |
| 12 | П→х В | 6L | 39 | х→П 0 | 40 | 66 | F ln | 18 |
| 13 | + | 10 | 40 | П→х 8 | 68 | 67 | × | 12 |
| 14 | х→П В | 4L | 41 | × | 12 | 68 | х→П 9 | 49 |
| 15 | ПП | 53 | 42 | П→х 7 | 67 | 69 | F. | 25 |
| 16 | 38 | 38 | 43 | + | 10 | 70 | В/О | 52 |
| 17 | F x<0 | 5C | 44 | х→П 7 | 47 | | | |
| 18 | 11 | 11 | 45 | 0 | 00 | | Регистры | |
| 19 | П→х 9 | 69 | 46 | х→П 6 | 46 | 0;6;9 | оперативные | |
| 20 | П→х С | 6C | 47 | П→х 7 | 67 | 1—5 | $y_1$—$y_5$ | |
| 21 | + | 10 | 48 | П→х 8 | 68 | 7 | $x_1$ | |
| 22 | х→П С | 4C | 49 | — | 11 | 8 | $\Delta x$ | |
| 23 | ПП | 53 | 50 | х→П 7 | 47 | А | а | |
| 24 | 38 | 38 | 51 | ПП | 53 | В | в | |
| 25 | F x<0 | 5C | 52 | 71 | 71 | С | с | |
| 26 | 19 | 19 | 53 | К П→х В↑ | ГЕ | Д | $\sigma^2$ | |

Программа IV.3.4/52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | 9 | 09 | 05 | + | 10 | 10 | 03 | 03 |
| 01 | F $10^x$ | 15 | 06 | х→П А | 4— | 11 | П→х 9 | 69 |
| 02 | х→П Д | 4Г | 07 | ПП | 53 | 12 | П→х В | 6L |
| 03 | П→х 9 | 69 | 08 | 38 | 38 | 13 | + | 10 |
| 04 | П→х А | 6— | 09 | F x<0 | 5C | 14 | х→П В | 4L |

*Продолжение*

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | ПП | 53 | 39 | x→П 0 | 40 | 63 | 46 | 46 |
| 16 | 38 | 38 | 40 | П→x 8 | 68 | 64 | П→x Д | 6Г |
| 17 | F x<0 | 5C | 41 | × | 12 | 65 | ←→ | 14 |
| 18 | 11 | 11 | 42 | П→x 7 | 67 | 66 | x→П Д | 4Г |
| 19 | П→x 9 | 69 | 43 | + | 10 | 67 | — | 11 |
| 20 | П→x C | 6C | 44 | x→П 7 | 47 | 68 | П→x 9 | 69 |
| 21 | + | 10 | 45 | 0 | 00 | 69 | 3 | 03 |
| 22 | x→П C | 4C | 46 | x→П E | 4E | 70 | F ln | 18 |
| 23 | ПП | 53 | 47 | П→x 0 | 60 | 71 | × | 12 |
| 24 | 38 | 38 | 48 | 1 | 01 | 72 | x→П 9 | 49 |
| 25 | F x<0 | 5C | 49 | + | 10 | 73 | F. | 25 |
| 26 | 19 | 19 | 50 | x→П 0 | 40 | 74 | B/O | 52 |
| 27 | П→x 9 | 69 | 51 | П→x 7 | 67 | | Регистры | |
| 28 | /—/ | 0L | 52 | П→x 8 | 68 | | | |
| 29 | 2 | 02 | 53 | — | 11 | 0;9;E | оперативные | |
| 30 | : | 13 | 54 | x→П 7 | 47 | 1—6 | $y_1 - y_6$ | |
| 31 | x→П 9 | 49 | 55 | ПП | 53 | 7 | $x_1$ | |
| 32 | F cos | 1Г | 56 | 75 | 75 | 8 | $\Delta x$ | |
| 33 | F $\cos^{-1}$ | 1— | 57 | К П→x 0 | Г0 | A | a | |
| 34 | F x=0 | 5E | 58 | — | 11 | B | в | |
| 35 | 03 | 03 | 59 | F $x^2$ | 22 | C | c | |
| 36 | П→x Д | 6Г | 60 | П→x E | 6E | Д | $\sigma^2$ | |
| 37 | С/П | 50 | 61 | + | 10 | | | |
| 38 | 6 | 06 | 62 | F L0 | 5Г | | | |

Для обеих программ используется единая инструкция.

Инструкция IV.3.4/54,52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Ввести программу и подпрограмму вычисления f(x, a, b, c) | | | |
| 2. Занести требуемое значение n в адрес 38 основной программы | | | |
| 3. Переключатель Р/Г поставить в положение: либо Г — для грубой оценки, либо Р — для точной оценки a, b, c | | | |
| 4. Занести значения $x_1$, $\Delta x$, $y_1 - y_n$ | $x_1$ | x→П 7 | $x_1$ |
| | $\Delta x$ | x→П 8 | $\Delta x$ |
| | $y_1$ | x→П 1 | $y_1$ |
| | . . . . . | . . . . . | . . . . . |
| | $y_n$ | x→П n | $y_n$ |

*Продолжение*

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 5. Занести начальные значения параметров $a_0$, $b_0$, $c_0$ и $h_0$ (шаг изменения a, b, c) | $a_0$ | x→П A | $a_0$ |
| | $b_0$ | x→П B | $b_0$ |
| | $c_0$ | x→П C | $c_0$ |
| | $h_0$ | x→П 9 | $h_0$ |
| 6. Вычислить конечные значения a, b, c, $\hat{\sigma}^2$ | | В/О С/П | $\hat{\sigma}^2$—в рег. X, Д<br>a—в рег. A<br>b—в рег. B<br>c—в рег. C |

*Пример.* Вычислить оптимальные значения a, b, c при аппроксимации исходной функции y (x), заданной в четырех узлах:

$$x_i = \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$

$$y_i = \quad 0{,}558 \quad 0{,}433 \quad 0{,}418 \quad 0{,}446$$

функцией вида $f(x, a, b, c) = a \cdot \exp(x/b)/(1 + cx)$ и начальных значениях $a_0 = 1{,}9$, $b_0 = 3{,}1$, $c_0 = 3{,}9$, $h_0 = 0{,}2$.

Решение.

Подпрограмма вычисления аппроксимирующей функции f (x, a, b, c) имеет вид В↑ П → x B : F $e^x$ П→ x A× ↔ П→ x C×1 + : В/О

Занести в адрес 38 основной программы значение n = 4.

Переключатель Р/Г поставить в положение: либо Г — для грубой оценки a, b, c, либо в Р — для более точной оценки a, b, c.

Занести значения $x_1$, $\Delta x$, $y_1 - y_4$ и начальные значения $a_0$, $b_0$, $c_0$, $h_0$ согласно инструкции и запустить программу на счет.

Ответ:

1. переключатель Р/Г в положении Г.

$$a = 2{,}2345, \quad b = 3{,}1321, \quad c = 4{,}4028, \quad \hat{\sigma}^2 = 4{,}31 \cdot 10^{-4}.$$

Время вычисления примера — 6 — 8 ч.

2. переключатель Р/Г в положении Р.

$$a = 2{,}2042, \quad b = 2{,}978, \quad c = 4{,}496, \quad \hat{\sigma}^2 = 2{,}09 \cdot 10^{-5}.$$

Время вычисления примера — 15—20 ч.

## IV.4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ МНОГОЧЛЕНА

Вычисляется значение многочлена n-й степени с действительными коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_n$

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

в произвольной точке x.

## IV.4.1. ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЕ x

### IV.4.1.1. ФИКСИРОВАННОЕ n

При вычислении по программе IV.4.1.1/21 ($n \leqslant 6$) значения коэффициентов $a_i$ ($i = 0, 1, \ldots, 6$) вводятся в регистры памяти 2—8.

Программа IV.4.1.1/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P, | 43 | 21 | F4 | 42 | 42 | × | 26 |
| 01 | F8 | 82 | 22 | ПП | 68 | 43 | ↑ | 06 |
| 02 | ПП | 68 | 23 | F: | 35 | 44 | В/О | 48 |
| 03 | : | 36 | 24 | F3 | 32 | | | |
| 04 | F7 | 72 | 25 | ПП | 68 | | Регистры | |
| 05 | ПП | 68 | 30 | F: | 35 | | | |
| 10 | F: | 35 | 31 | F2 | 22 | 2 | $a_0$ | |
| 11 | F6 | 62 | 32 | + | 96 | 3 | $a_1$ | |
| 12 | ПП | 68 | 33 | С/П | 78 | 4 | $a_2$ | |
| 13 | F: | 35 | 34 | + | 96 | 5 | $a_3$ | |
| 14 | F5 | 52 | 35 | Р/—/ | 53 | 6 | $a_4$ | |
| 15 | ПП | 68 | 40 | ↑ | 06 | 7 | $a_5$ | |
| 20 | F: | 35 | 41 | P, | 43 | 8 | $a_6$ | |

Инструкция IV.4.1.1/21

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Занести коэффициенты $a_0 - a_6$ | $a_0$ | P2 | |
| | $a_1$ | P3 | |
| | . . . . . | . . . . . | |
| | $a_6$ | P8 | |
| 2. Ввести значение x и вычислить значение многочлена f(x) | x | В/О С/П | f(x) |
| 3. Для вычисления f(x) при другом значении x — к п. 2 | | | |

Время вычисления — 11 с.

При расчетах по программам IV.4.1.1/54 ($n \leqslant 12$) и IV.4.1.1/52 ($n \leqslant 13$) в случае, если степень многочлена меньше максимально допустимой, нулевые коэффициенты $a_i = 0$ при $i > n$ вводить не нужно.

Программа IV.4.1.1/54

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | В↑ | 0E | 05 | + | 10 |
| 01 | Fπ | 20 | 06 | FL0 | 5Г |
| 02 | 0 | 00 | 07 | 03 | 03 |
| 03 | × | 12 | 08 | С/П | 50 |
| 04 | КП→xВ↑ | ГЕ | | | |

Регистры
0 счетчик
1—Д $a_0$—$a_{12}$

Время вычисления — $T = (1{,}5 + n)$ с.

Программа IV.4.1.1/52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | Fπ | 20 | 07 | П→x0 | 60 |
| 01 | 0 | 00 | 08 | 1 | 01 |
| 02 | B↑ | 0E | 09 | — | 11 |
| 03 | F. | 25 | 10 | Fx=0 | 5E |
| 04 | × | 12 | 11 | 03 | 03 |
| 05 | КП→x0 | Г0 | 12 | + | 10 |
| 06 | + | 10 | 13 | С/П | 50 |

Регистры
0 счетчик
1—E $a_0$—$a_{13}$

Время вычисления — $T = (4 + 3n)$ с.
Для обеих программ используется единая инструкция.

Инструкция IV.4.1.1/54,52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Занести коэффициенты $a_0$—$a_n$ | $a_0$ | x→П1 | $a_0$ |
| | $a_1$ | x→П2 | $a_1$ |
| | . . . . . | . . . . . | . . . . . |
| | $a_n$ | x→П(n+1) | $a_n$ |
| 2. Занести: | | | |
| а) для программы IV.4.1.1/54 | n+1 | x→П0 | n+1 |
| б) для программы IV.4.1.1/52 | n+2 | x→П0 | n+2 |
| 3. Занести x и вычислить f(x) | x | В/О С/П | f(x) |
| 4. Для вычисления f(x) при другом значении x — к п. 2 | | | |

*Пример.* $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $x = 3$. $f(3) = 34$.

### IV.4.1.2. ПОШАГОВЫЙ ВЫВОД

Вычисление и вывод значений многочлена производятся последовательно по мере ввода коэффициентов в порядке увеличения степени при x : $a_0$, $a_1$, $a_2$, ... После ввода очередного значения $a_i$ и выполнения команды С/П на индикаторе высвечивается соответствующее значение $f_i = a_0 + a_1x + \ldots a_ix^i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ (Нулевые значения коэффициентов также надо вводить; при $a_i = 0$, очевидно, $f_i = f_{i-1}$).

Программа IV.4.1.2/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Инструкция |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P2 | 21 | 14 | × | 26 | x B/O C/П $a_0$ C/П $a_1$ |
| 01 | 1 | 14 | 15 | P3 | 31 | C/П... |
| 02 | P3 | 31 | 20 | ↑ | 06 | Результат |
| 03 | C/П | 78 | 21 | F4 | 42 | 1, $f_0$, $f_1$,... |
| 04 | P5 | 51 | 22 | × | 26 | |
| 05 | C/П | 78 | 23 | ↑ | 06 | Регистры |
| 10 | P4 | 41 | 24 | F5 | 52 | 2 x |
| 11 | F3 | 32 | 25 | + | 96 | 3 $x^i$ |
| 12 | ↑ | 06 | 30 | БП | 58 | 4 $a_i$ |
| 13 | F2 | 22 | 31 | F↑ | 05 | 5 $f_i$ |

Программа IV.4.1.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Инструкция |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П0 | 40 | 07 | × | 12 | x B/O C/П $a_0$ C/П $a_1$ |
| 01 | 1 | 01 | 08 | x→П1 | 41 | C/П... |
| 02 | x→П1 | 41 | 09 | × | 12 | Результат |
| 03 | C/П | 50 | 10 | + | 10 | 1, $f_0$, $f_1$,... |
| 04 | C/П | 50 | 11 | БП | 51 | Регистры |
| 05 | П→x1 | 61 | 12 | 04 | 04 | 0 x |
| 06 | П→x0 | 60 | | | | 1 оперативный |

Время вычисления после ввода очередного значения $a_1$ — 2 с.

*Пример.* x = 2:

$a_0 = 1$, $f_0 = 1$;

$a_1 = 2$, $f_1 = 5$;

$a_2 = 0$, $f_2 = 5$;

$a_3 = 5$, $f_3 = 45$;

. . . . . .

### IV.4.2. КОМПЛЕКСНОЕ x

Вычисляется значение многочлена n-й степени от комплексного $x = y + jz$.

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n.$$

#### IV.4.2.1. ФИКСИРОВАННОЕ n

Вычисляется значение многочлена при фиксированном n.

Приведены три программы вычисления.

1. Программа IV.4.2.1/21 при $n \leqslant 5$. Время вычисления — $T = 40$ с.
2. Программа IV. 4.2.1/54 при $n \leqslant 10$. Время вычисления — $T = (8n + 12)$ с.

3. Программа IV.4.2.1/52 при $n \leqslant 11$. Время вычисления — $T = (7n + 3)$ с.

Коэффициенты $a_i$ ($i = 0,1,2,\ldots, n$) вводятся в регистры памяти вручную один раз перед первым вводом x и сохраняются в них в процессе вычислений, поэтому при последующих вводах x и вычислениях f (x) повторно вводить коэффициенты $a_i$ не нужно.

Программа IV.4.2.1/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | ↑ | 06 | 34 | С/П | 78 | 72 | Р, | 43 |
| 01 | 0 | 04 | 35 | + | 96 | 73 | × | 26 |
| 02 | Р/—/ | 53 | 40 | Р/—/ | 53 | 74 | ↑ | 06 |
| 03 | F7 | 72 | 41 | ↑ | 06 | 75 | Р, | 43 |
| 04 | Р/—/ | 53 | 42 | Р, | 43 | 80 | + | 96 |
| 05 | ←→ | 16 | 43 | ←→ | 16 | 81 | ↑ | 06 |
| 10 | ПП | 68 | 44 | × | 26 | 82 | Р/—/ | 53 |
| 11 | F4 | 42 | 45 | Р, | 43 | 83 | ←→ | 16 |
| 12 | F6 | 62 | 50 | Р, | 43 | 84 | Р/—/ | 53 |
| 13 | ПП | 68 | 51 | F8 | 82 | 85 | ↑ | 06 |
| 14 | : | 36 | 52 | × | 26 | 90 | В/О | 48 |
| 15 | F5 | 52 | 53 | Р/—/ | 53 | | | |
| 20 | ПП | 68 | 54 | ↑ | 06 | | Регистры | |
| 21 | : | 36 | 55 | F8 | 82 | | | |
| 22 | F4 | 42 | 60 | × | 26 | 2 | $a_0$ | |
| 23 | ПП | 68 | 61 | ←→ | 16 | 3 | $a_1$ | |
| 24 | : | 36 | 62 | Р/—/ | 53 | 4 | $a_2$ | |
| 25 | F3 | 32 | 63 | — | 86 | 5 | $a_3$ | |
| 30 | ПП | 68 | 64 | /—/ | 56 | 6 | $a_4$ | |
| 31 | : | 36 | 65 | Р/—/ | 53 | 7 | $a_5$ | |
| 32 | F2 | 22 | 70 | ↑ | 06 | 8 | y | |
| 33 | + | 96 | 71 | Р, | 43 | | | |

Инструкция IV.4.2.1/21

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Занести коэффициенты $a_0 - a_5$ в регистры памяти | $a_0$ | Р2 | $a_0$ |
| | $a_1$ | Р3 | $a_1$ |
| | . . . . . | . . . . . | . . . . . |
| | $a_5$ | Р7 | $a_5$ |
| 2. Занести z в регистр памяти | z | Р8 | z |
| 3. Занести значение y и вычислить Re(f(x)) | y | В/О С/П | Re (f (x)) |
| 4. Вычислить Im(f(x)) | | Р, | Im (f (x)) |
| 5. Для вычисления f(x) при другом x — к п. 2 | | | |

Время вычисления — 28 с.

Программа IV.4.2.1/54

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→ПД | 4Г | 13 | ←→ | 14 | 26 | — | 11 |
| 01 | ←→ | 14 | 14 | × | 12 | 27 | КП→xB↑ | ГЕ |
| 02 | x→ПС | 4С | 15 | FBx | 0 | 28 | + | 10 |
| 03 | 0 | 00 | 16 | F. | 25 | 29 | FL0 | 5Г |
| 04 | КП→x0 | Г0 | 17 | + | 10 | 30 | 07 | 07 |
| 05 | БП | 51 | 18 | B↑ | 0Е | 31 | С/П | 50 |
| 06 | 29 | 29 | 19 | F. | 25 | | | |
| 07 | ←→ | 14 | 20 | F. | 25 | | Регистры | |
| 08 | FBx | 0 | 21 | П→xС | 6С | | | |
| 09 | П→xД | 6Г | 22 | × | 12 | | 0 счетчик | |
| 10 | × | 12 | 23 | ←→ | 14 | | 1—B $a_0$—$a_{10}$ | |
| 11 | ←→ | 14 | 24 | П→xД | 6Г | | С y | |
| 12 | П→xС | 6С | 25 | × | 12 | | Д z | |

Программа IV.4.2.1/52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→ПЕ | 4Е | 15 | FBx | 0 | 30 | 1 | 01 |
| 01 | ←→ | 14 | 16 | F. | 25 | 31 | — | 11 |
| 02 | x→ПД | 4Г | 17 | + | 10 | 32 | Fx=0 | 5Е |
| 03 | 0 | 00 | 18 | B↑ | 0Е | 33 | 06 | 06 |
| 04 | B↑ | 0Е | 19 | F. | 25 | 34 | F. | 25 |
| 05 | B↑ | 0Е | 20 | F. | 25 | 35 | С/П | 50 |
| 06 | F. | 25 | 21 | П→xД | 6Г | | | |
| 07 | ←→ | 14 | 22 | × | 12 | | Регистры | |
| 08 | FBx | 0 | 23 | ←→ | 14 | | | |
| 09 | П→xЕ | 6Е | 24 | П→xЕ | 6Е | | 0 счетчик | |
| 10 | × | 12 | 25 | × | 12 | | 1—C $a_0$—$a_{11}$ | |
| 11 | ←→ | 14 | 26 | — | 11 | | Д y | |
| 12 | П→xД | 6Г | 27 | КП→x0 | Г0 | | Е z | |
| 13 | ←→ | 14 | 28 | + | 10 | | | |
| 14 | × | 12 | 29 | П→x0 | 60 | | | |

Для обеих программ используется единая инструкция.

Инструкция IV.4.2.1/54,52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Занести коэффициенты $a_0 - a_n$ в регистры памяти | $a_0$ | x→П1 | $a_0$ |
| | $a_1$ | x→П2 | $a_1$ |
| | . . . . . | . . . . . | . . . . . |
| | $a_n$ | x→П$_{(n+1)}$ | $a_{(n+1)}$ |
| 2. Занести в регистр памяти n+2 (на единицу больше количества введенных коэффициентов) | n+2 | x→П0 | n+2 |

*Продолжение*

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 3. Ввести x=y+jz | y<br>z | B↑ | y |
| 4. Вычислить f(x) | | B/O С/П | Re[f(x)]—в рег. X<br>Im[f(x)]—в рег. Y |
| 5. Для вычисления f(x) при другом x — к п. 2 | | | |

Время вычисления — T = (3 + 8n) с.

*Пример*. Вычислить значение многочлена $f(x) = 6+5x+4x^2+3x^3+2x^4+x^5$ при $x = 2-3j$ ($y = 2$, $z = -3$).

Ответ: $f(2-3j) = -258 + j\,747$.

### IV.4.2.2. ПОШАГОВЫЙ ВЫВОД

Вычисление и вывод значения многочлена производятся последовательно по мере ввода коэффициентов в порядке увеличения степени при x : $a_0$, $a_1$, $a_2$, .... После ввода очередного значения $a_i$ и выполнения команды С/П вычисленные значения $Re[f_i(x)]$ и $Im[f_i(x)]$ помещены в регистры X и Y соответственно. Для вывода значения $Im[f(x)]$ в регистр X следует использовать команду ←→ (при расчете по программе IV.4.2.2/54, 52 перед вводом последующего значения $a_{i+1}$ при этом следует восстановить прежнее состояние регистров X и Y также командой ←→ ). (Нулевые значения коэффициентов также надо вводить; при $a_i = 0$, очевидно $f_i = f_{i-1}$.)

Программа IV.4.2.2/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P4 | 41 | 20 | F7 | 72 | 40 | + | 96 |
| 01 | F2 | 22 | 21 | × | 26 | 41 | P4 | 41 |
| 02 | P6 | 61 | 22 | ↑ | 06 | 42 | F3 | 32 |
| 03 | F3 | 32 | 23 | F5 | 52 | 43 | ↑ | 06 |
| 04 | P7 | 71 | 24 | + | 96 | 44 | F7 | 72 |
| 05 | Cx | 76 | 25 | P5 | 51 | 45 | × | 26 |
| 10 | P5 | 51 | 30 | P/—/ | 53 | 50 | P, | 43 |
| 11 | ↑ | 06 | 31 | ↑ | 06 | 51 | F2 | 22 |
| 12 | F4 | 42 | 32 | F6 | 62 | 52 | ↑ | 06 |
| 13 | С/П | 78 | 33 | × | 26 | 53 | F6 | 62 |
| 14 | ↑ | 06 | 34 | ↑ | 06 | 54 | × | 26 |
| 15 | P, | 43 | 35 | F4 | 42 | 55 | ↑ | 06 |

*Продолжение*

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 60 | P/—/ | 53 | 74 | ↑ | 06 |
| 61 | — | 86 | 75 | F7 | 72 |
| 62 | ↑ | 06 | 80 | × | 26 |
| 63 | F6 | 62 | 81 | ↑ | 06 |
| 64 | ←→ | 16 | 82 | P/—/ | 53 |
| 65 | P6 | 61 | 83 | + | 96 |
| 70 | F3 | 32 | 84 | P7 | 71 |
| 71 | × | 26 | 85 | F5 | 52 |
| 72 | P, | 43 | 90 | БП | 58 |
| 73 | F2 | 22 | 91 | F1 | 12 |

Регистры

2 y
3 z
4 Re ($f_1$)
5 Im ($f_1$)
6; 7 оперативные

Программа IV.4.2.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П4 | 44 | 15 | + | 10 | 30 | x→П8 | 48 |
| 01 | 1 | 01 | 16 | П→x2 | 62 | 31 | П→x6 | 66 |
| 02 | x→П7 | 47 | 17 | П→x7 | 67 | 32 | × | 12 |
| 03 | Cx | 0Г | 18 | × | 12 | 33 | П→x5 | 65 |
| 04 | x→П8 | 48 | 19 | П→x3 | 63 | 34 | + | 10 |
| 05 | x→П5 | 45 | 20 | П→x8 | 68 | 35 | БП | 51 |
| 06 | ←→ | 14 | 21 | × | 12 | 36 | 05 | 05 |
| 07 | С/П | 50 | 22 | — | 11 | | | |
| 08 | x→П6 | 46 | 23 | x→П7 | 47 | | | |
| 09 | П→x2 | 62 | 24 | П→x6 | 66 | | | |
| 10 | П→x8 | 68 | 25 | × | 12 | | | |
| 11 | × | 12 | 26 | П→x4 | 64 | | | |
| 12 | П→x3 | 63 | 27 | + | 10 | | | |
| 13 | П→x7 | 67 | 28 | x→П4 | 44 | | | |
| 14 | × | 12 | 29 | ←→ | 14 | | | |

Регистры

2 y
3 z
4 Re ($f_1$)
5 Im ($f_1$)
6—8 оперативные

Для обеих программ используется единая инструкция.

Инструкция IV.4.2.2/21,54,52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Занести в регистры памяти значение x=y+jz: | | | |
| а) для программы IV.4.2.2/21 | y | P2 | y |
| | z | P3 | z |
| б) для программы IV.4.2.2/54,52 | y | x→П2 | y |
| | z | x→П3 | z |

*Продолжение*

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 2. Перейти к началу программы | | В/О | |
| 3. Ввести очередное значение $a_i$ и вычислить $f_i$ | $a_i$ | С/П | Re ($f_i$)—в рег. X,4<br>Im ($f_i$)—в рег. Y,5 |
| 4. Если данные не исчерпаны — к п. 3 | | | |

Время вычисления очередного значения $f_i$ — 8 — 10 с.

*Пример.* Вычислить последовательные значения многочлена при $x = 2—3j$ и $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, ...

Ответ:

$a_0 = 1$, $f_0 = 1$;

$a_1 = 2$, $f_1 = 5—6\,j$;

$a_3 = 3$, $f_2 = — 10—42\,j$;

. . . . . .

# Глава V

# СТАТИСТИКА

## V.1. МОМЕНТЫ ВЫБОРОЧНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

### V.1.1. СРЕДНЕЕ И ДИСПЕРСИЯ

Для совокупности значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ среднее и дисперсия вычисляются по формулам [19]:

$$m_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$m_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_1)^2.$$

Значения $m_1$ и $m_2$ вычисляются на каждом шаге ввода $x_i$: значение $m_1$ выводится на индикатор, а $m_2$ может быть выведено на индикатор командой $\leftrightarrow$ .

Программа V.1.1/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | Cx | 76 | 23 | ↑ | 06 | 50 | $Fx^2$ | 55 |
| 01 | P2 | 21 | 24 | F6 | 62 | 51 | — | 86 |
| 02 | P3 | 31 | 25 | : | 36 | 52 | P5 | 51 |
| 03 | P6 | 61 | 30 | P4 | 41 | 53 | ↑ | 06 |
| 04 | С/П | 78 | 31 | F5 | 52 | 54 | F4 | 42 |
| 05 | P5 | 51 | 32 | $Fx^2$ | 55 | 55 | БП | 58 |
| 10 | ↑ | 06 | 33 | ↑ | 06 | 60 | F↑ | 05 |
| 11 | F2 | 22 | 34 | F3 | 32 | | | |
| 12 | + | 96 | 35 | + | 96 | | Регистры | |
| 13 | P2 | 21 | 40 | P3 | 31 | | | |
| 14 | F6 | 62 | 41 | ↑ | 06 | 2 | $\Sigma x$ | |
| 15 | 1 | 14 | 42 | F6 | 62 | 3 | $\Sigma x^2$ | |
| 20 | + | 96 | 43 | : | 36 | 4 | $m_1$ | |
| 21 | P6 | 61 | 44 | ↑ | 06 | 5 | $m_2$ | |
| 22 | F2 | 22 | 45 | F4 | 42 | 6 | n | |

Программа V.1.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | Cx | 0Г | 12 | x→П3 | 43 | 24 | x→П5 | 45 |
| 01 | x→П2 | 42 | 13 | П→x6 | 66 | 25 | П→x4 | 64 |
| 02 | x→П3 | 43 | 14 | : | 13 | 26 | БП | 51 |
| 03 | x→П6 | 46 | 15 | ←→ | 14 | 27 | 04 | 04 |
| 04 | С/П | 50 | 16 | П→x2 | 62 | | | |
| 05 | КП→x6 | Г6 | 17 | + | 10 | | Регистры | |
| 06 | ←→ | 14 | 18 | x→П2 | 42 | | | |
| 07 | В↑ | 0Е | 19 | П→x6 | 66 | 2 | $\Sigma x$ | |
| 08 | В↑ | 0Е | 20 | : | 13 | 3 | $\Sigma x^2$ | |
| 09 | $Fx^2$ | 22 | 21 | x→П4 | 44 | 4 | $m_1$ | |
| 10 | П→x3 | 63 | 22 | $Fx^2$ | 22 | 5 | $m_2$ | |
| 11 | + | 10 | 23 | — | 11 | 6 | n | |

Для обеих программ используется единая инструкция.

Инструкция V.1.1/21, 54, 52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Очистить сумматоры | | В/О С/П | |
| 2. Занести очередное значение $x_1$ | $x_1$ | С/П | $m_1$—в рег. X,4<br>$m_2$—в рег. Y,5 |
| 3. Если данные не исчерпаны — к п. 2 | | | |

Время занесения одного числа — 5—7 с.

*Пример.* Вычислить среднее $m_1$ и дисперсию $m_2$ выборки: — 1; 3; 2; 0; 4.

Ответ: $m_1 = 1,6$; $m_2 = 3,44$.

### V.1.2. ЧЕТЫРЕ ПЕРВЫХ ЦЕНТРАЛЬНЫХ МОМЕНТА, АСИММЕТРИЯ И ЭКСЦЕСС

Для совокупности значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ четыре первых центральных момента, коэффициенты асимметрии и эксцесса вычисляются по формулам [19]:

$$\text{среднее} \quad m_1 = \frac{1}{n} \sum x_i,$$

$$\text{дисперсия} \quad m_2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - m_1)^2,$$

$$\text{третий момент} \quad m_3 = \frac{1}{n} \sum (x_i - m_1)^3,$$

коэффициент асимметрии $g_1 = m_3/\sqrt{m_2^3}$,

четвертый момент $m_4 = \frac{1}{n}\sum (x_i - m_1)^4$,

коэффициент эксцесса $g_2 = m_4/m_2^2 - 3$.

Программа V.1.2/54

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | Cx | 0Г | 28 | П→x2 | 62 | 56 | × | 12 |
| 01 | x→П1 | 41 | 29 | П→x3 | 63 | 57 | — | 11 |
| 02 | x→П2 | 42 | 30 | П→x4 | 64 | 58 | x→П1 | 41 |
| 03 | x→П3 | 43 | 31 | Fx² | 22 | 59 | П→x3 | 63 |
| 04 | x→П4 | 44 | 32 | x→П0 | 40 | 60 | Fx² | 22 |
| 05 | x→П5 | 45 | 33 | — | 11 | 61 | : | 13 |
| 06 | 4 | 04 | 34 | x→П3 | 43 | 62 | 3 | 03 |
| 07 | x→П0 | 40 | 35 | 3 | 03 | 63 | — | 11 |
| 08 | П→x5 | 65 | 36 | ПП | 53 | 64 | x→П0 | 40 |
| 09 | С/П | 50 | 37 | 66 | 66 | 65 | С/П | 50 |
| 10 | В↑ | 0E | 38 | — | 11 | 66 | × | 12 |
| 11 | В↑ | 0E | 39 | x→П2 | 42 | 67 | П→x0 | 60 |
| 12 | КП→xВ↑ | ГЕ | 40 | П→x3 | 63 | 68 | + | 10 |
| 13 | + | 10 | 41 | В↑ | 0E | 69 | П→x4 | 64 |
| 14 | Кx→ПВ↑ | LE | 42 | F√ | 21 | 70 | × | 12 |
| 15 | F. | 25 | 43 | × | 12 | 71 | В/О | 52 |
| 16 | × | 12 | 44 | : | 13 | | | |
| 17 | FL0 | 5Г | 45 | x→П6 | 46 | | Регистры | |
| 18 | 11 | 11 | 46 | П→x1 | 61 | | | |
| 19 | КП→x5 | Г5 | 47 | П→x3 | 63 | 0 | счетчик; $g_2$ | |
| 20 | БП | 51 | 48 | 6 | 06 | 1 | $\Sigma x^4$; $m_4$ | |
| 21 | 06 | 06 | 49 | ПП | 53 | 2 | $\Sigma x^3$; $m_3$ | |
| 22 | КП→xВ↑ | ГЕ | 50 | 66 | 66 | 3 | $\Sigma x^2$; $m_2$ | |
| 23 | П→x5 | 65 | 51 | 4 | 04 | 4 | $\Sigma x$; $m_1$ | |
| 24 | : | 13 | 52 | П→x2 | 62 | 5 | n | |
| 25 | Кx→ПВ↑ | LE | 53 | × | 12 | 6 | $g_1$ | |
| 26 | FL0 | 5Г | 54 | + | 10 | | | |
| 27 | 22 | 22 | 55 | П→x4 | 64 | | | |

Программа V.1.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | Cx | 0Г | 09 | С/П | 50 | 18 | F. | 25 |
| 01 | x→П1 | 41 | 10 | В↑ | 0E | 19 | × | 12 |
| 02 | x→П2 | 42 | 11 | В↑ | 0E | 20 | FL0 | 5Г |
| 03 | x→П3 | 43 | 12 | П→x0 | 60 | 21 | 11 | 11 |
| 04 | x→П4 | 44 | 13 | F→ПД | 4Г | 22 | КП→x5 | Г5 |
| 05 | x→П5 | 45 | 14 | F. | 25 | 23 | БП | 51 |
| 06 | 4 | 04 | 15 | КП→xД | ГГ | 24 | 06 | 06 |
| 07 | x→П0 | 40 | 16 | + | 10 | 25 | П→x0 | 60 |
| 08 | П→x5 | 65 | 17 | Кx→ПД | LГ | 26 | x→ПД | 4Г |

*Продолжение*

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 27 | F. | 25 | 48 | $Fx^{-1}$ | 21 | 69 | — | 11 |
| 28 | КП→хД | ГГ | 49 | × | 12 | 70 | х→П0 | 40 |
| 29 | П→х5 | 65 | 50 | : | 13 | 71 | С/П | 50 |
| 30 | : | 13 | 51 | х→П6 | 46 | 72 | × | 12 |
| 31 | Кх→ПД | LГ | 52 | П→х1 | 61 | 73 | П→х0 | 60 |
| 32 | FL0 | 5Г | 53 | П→х3 | 63 | 74 | + | 10 |
| 33 | 25 | 25 | 54 | 6 | 06 | 75 | П→х4 | 64 |
| 34 | П→х2 | 62 | 55 | ПП | 53 | 76 | × | 12 |
| 35 | П→х3 | 63 | 56 | 72 | 72 | 77 | В/О | 52 |
| 36 | П→х4 | 64 | 57 | 4 | 04 | | | |
| 37 | $Fx^2$ | 22 | 58 | П→х2 | 62 | | Регистры | |
| 38 | х→П0 | 40 | 59 | × | 12 | | | |
| 39 | — | 11 | 60 | + | 10 | | 0 счетчик; $g_2$ | |
| 40 | х→П3 | 43 | 61 | П→х4 | 64 | | 1 $\Sigma x^4$; $m_4$ | |
| 41 | 3 | 03 | 62 | × | 12 | | 2 $\Sigma x^3$; $m_3$ | |
| 42 | ПП | 53 | 63 | — | 11 | | 3 $\Sigma x^2$; $m_2$ | |
| 43 | 72 | 72 | 64 | х→П1 | 41 | | 4 $\Sigma x$; $m_1$ | |
| 44 | — | 11 | 65 | П→х3 | 63 | | 5 n | |
| 45 | х→П2 | 42 | 66 | $Fx^2$ | 22 | | 6 $g_1$ | |
| 46 | П→х3 | 63 | 67 | : | 13 | | Д оперативный | |
| 47 | В↑ | 0Е | 68 | 3 | 03 | | | |

Для обеих программ используется единая инструкция.

Инструкция V.1.2/54,52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Очистить сумматоры | | В/О С/П | |
| 2. Ввести очередное значение $x_i$ | $x_i$ | С/П | i |
| 3. Если данные исчерпаны, далее, нет — к п. 2 | | | |
| 4. Вычислить моменты: | | | |
| а) для программы V.1.2/54 | | БП 22 С/П | $g_2$—в рег. X,0 |
| б) для программы V.1.2/54,52 | | БП 25 С/П | $m_1$—в рег. 4<br>$m_2$—в рег. 3<br>$m_3$—в рег. 2<br>$m_4$—в рег. 1<br>$g_1$—в рег. 6 |

Время обработки одного числа — 11 с, время вычисления моментов — 21 с.

*Пример.* Вычислить четыре первых центральных момента, асимметрию и эксцесс выборки

— 1 —3 0 5 —4 2 1 —2 3 1

Ответ:

$m_1 = 0{,}2$, $m_2 = 6{,}96$, $m_3 = 2{,}016$, $m_4 = 104{,}5152$, $g_1 = 0{,}10979351$, $g_2 = -0{,}8424495$.

### V.1.3. МОМЕНТЫ, АСИММЕТРИЯ И ЭКСЦЕСС ВЫБОРКИ, СГРУППИРОВАННОЙ В КЛАССЫ

Вычисляются первые четыре начальных $M_k$ и центральных $m_k$ выборочных момента, коэффициенты асимметрии $g_1$ и эксцесса $g_2$. Весь диапазон возможных значений случайной величины x разделен на равные интервалы длины h. Выборка характеризуется значениями центров $x_i$ каждого интервала и количествами $n_i$ случайных величин, попавших в каждый интервал.

Программу, в частности, целесообразно применять при большом количестве исходных данных, сгруппировав их в относительно небольшом количестве интервалов. Учтены поправки Шеппарда на группирование.

Расчетные формулы [14]:

$$N = \Sigma n_i; \qquad M_1 = m_1 = \frac{1}{N}\sum n_i x_i;$$

$$M_2 = \frac{1}{N}\sum n_i x_i^2; \qquad m_2 = \frac{1}{N}\sum n_i (x_i - M_1)^2 - \frac{h^2}{12};$$

$$M_3 = \frac{1}{N}\sum n_i x_i^3; \qquad m_3 = \frac{1}{N}\sum n_i (x_i - M_1)^3;$$

$$M_4 = \frac{1}{N}\sum n_i x_i^4; \qquad m_4 = \frac{1}{N}\sum n_i (x_i - M_1)^4 - \frac{1}{2}h^2 \cdot \frac{1}{N}\sum (x_i - M_1)^2 + \frac{7}{240}h^4;$$

$$g_1 = \frac{m_3}{\sqrt{m_2^3}}; \qquad g_2 = \frac{m_4}{m_2^2} - 3.$$

Программа V.1.3/54

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | Cx | 0Г | 10 | x→П6 | 46 | 20 | 12 | 12 |
| 01 | x→П5 | 45 | 11 | ←→ | 14 | 21 | БП | 51 |
| 02 | x→П4 | 44 | 12 | B↑ | 0E | 22 | 06 | 06 |
| 03 | x→П3 | 43 | 13 | КП→xB↑ | ГЕ | 23 | КП→x0 | Г0 |
| 04 | x→П2 | 42 | 14 | + | 10 | 24 | КП→xB↑ | ГЕ |
| 05 | x→П1 | 41 | 15 | Кx→ПВ↑ | LE | 25 | П→x5 | 65 |
| 06 | 5 | 05 | 16 | F. | 25 | 26 | : | 13 |
| 07 | x→П0 | 40 | 17 | П→x6 | 66 | 27 | Кx→ПВ↑ | LE |
| 08 | П→x6 | 66 | 18 | × | 12 | 28 | FL0 | 5Г |
| 09 | С/П | 50 | 19 | FL0 | 5Г | 29 | 24 | 24 |

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 30 | С/П | 50 | 56 | × | 12 | 82 | П→х0 | 60 |
| 31 | П→х2 | 62 | 57 | + | 10 | 83 | — | 11 |
| 32 | П→х3 | 63 | 58 | П→х4 | 64 | 84 | х→П3 | 43 |
| 33 | П→х4 | 64 | 59 | × | 12 | 85 | $Fx^2$ | 22 |
| 34 | $Fx^2$ | 22 | 60 | — | 11 | 86 | : | 13 |
| 35 | х→П0 | 40 | 61 | х→П1 | 41 | 87 | 3 | 03 |
| 36 | — | 11 | 62 | С/П | 50 | 88 | — | 11 |
| 37 | х→П3 | 43 | 63 | $Fx^2$ | 22 | 89 | х→П0 | 40 |
| 38 | 3 | 03 | 64 | 1 | 01 | 90 | П→х2 | 62 |
| 39 | × | 12 | 65 | 2 | 02 | 91 | П→х3 | 63 |
| 40 | П→х0 | 60 | 66 | : | 13 | 92 | В↑ | 0Е |
| 41 | + | 10 | 67 | х→П0 | 40 | 93 | $F\sqrt{}$ | 21 |
| 42 | П→х4 | 64 | 68 | 0 | 00 | 94 | × | 12 |
| 43 | × | 12 | 69 | . | 0— | 95 | : | 13 |
| 44 | — | 11 | 70 | 7 | 07 | 96 | х→П5 | 45 |
| 45 | х→П2 | 42 | 71 | × | 12 | 97 | С/П | 50 |
| 46 | П→х1 | 61 | 72 | П→х3 | 63 | | | |
| 47 | П→х3 | 63 | 73 | — | 11 | | | |
| 48 | 6 | 06 | 74 | П→х0 | 60 | | | |
| 49 | × | 12 | 75 | 6 | 06 | | | |
| 50 | П→х0 | 60 | 76 | × | 12 | | | |
| 51 | + | 10 | 77 | × | 12 | | | |
| 52 | П→х4 | 64 | 78 | П→х1 | 61 | | | |
| 53 | × | 12 | 79 | + | 10 | | | |
| 54 | П→х2 | 62 | 80 | х→П1 | 41 | | | |
| 55 | 4 | 04 | 81 | П→х3 | 63 | | | |

Регистры

0 счетчик; $g_2$
1 $\Sigma n_1 x_i^4$; $m_4$
2 $\Sigma n_1 x_i^3$; $m_3$
3 $\Sigma n_1 x_i^2$; $m_2$
4 $\Sigma n_1 x_1$; $m_1$
5 $\Sigma n_1$
6 $x_1$; $g_1$

Программа V.1.3/52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | Сх | 0Г | 20 | П→х6 | 66 | 40 | $Fx^2$ | 22 |
| 01 | х→П5 | 45 | 21 | × | 12 | 41 | х→П0 | 40 |
| 02 | х→П4 | 44 | 22 | FL0 | 5Г | 42 | — | 11 |
| 03 | х→П3 | 43 | 23 | 12 | 12 | 43 | х→П3 | 43 |
| 04 | х→П2 | 42 | 24 | БП | 51 | 44 | 3 | 03 |
| 05 | х→П1 | 41 | 25 | 06 | 06 | 45 | × | 12 |
| 06 | 5 | 05 | 26 | КП→х0 | Г0 | 46 | П→х0 | 60 |
| 07 | х→П0 | 40 | 27 | П→х0 | 60 | 47 | + | 10 |
| 08 | П→х6 | 66 | 28 | х→ПД | 4Г | 48 | П→х4 | 64 |
| 09 | С/П | 50 | 29 | F. | 25 | 49 | × | 12 |
| 10 | х→П6 | 46 | 30 | КП→хД | ГГ | 50 | — | 11 |
| 11 | ←→ | 14 | 31 | П→х5 | 65 | 51 | х→П2 | 42 |
| 12 | П→х0 | 60 | 32 | : | 13 | 52 | П→х1 | 61 |
| 13 | х→ПД | 4Г | 33 | Кх→ПД | LГ | 53 | П→х3 | 63 |
| 14 | F. | 25 | 34 | FL0 | 5Г | 54 | 6 | 06 |
| 15 | В↑ | 0Е | 35 | 27 | 27 | 55 | × | 12 |
| 16 | КП→хД | ГГ | 36 | С/П | 50 | 56 | П→х0 | 60 |
| 17 | + | 10 | 37 | П→х2 | 62 | 57 | + | 10 |
| 18 | Кх→ПД | LГ | 38 | П→х3 | 63 | 58 | П→х4 | 64 |
| 19 | F. | 25 | 39 | П→х4 | 64 | 59 | × | 12 |

*Продолжение*

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 60 | П→x2 | 62 | 79 | — | 11 | 98 | B↑ | 0E |
| 61 | 4 | 04 | 80 | П→x0 | 60 | 99 | F$\sqrt{\ }$ | 21 |
| 62 | × | 12 | 81 | 6 | 06 | 100 | × | 12 |
| 63 | + | 10 | 82 | × | 12 | 101 | : | 13 |
| 64 | П→x4 | 64 | 83 | × | 12 | 102 | x→П5 | 45 |
| 65 | × | 12 | 84 | П→x1 | 61 | 103 | С/П | 50 |
| 66 | — | 11 | 85 | + | 10 | | | |
| 67 | x→П1 | 41 | 86 | x→П1 | 41 | | Регистры | |
| 68 | С/П | 50 | 87 | П→x3 | 63 | | | |
| 69 | Fx² | 22 | 88 | П→x0 | 60 | | 0 счетчик; $g_2$ | |
| 70 | 1 | 01 | 89 | — | 11 | | 1 $\Sigma n_1 x_i^4$; $M_4$; $m_4$ | |
| 71 | 2 | 02 | 90 | x→П3 | 43 | | 2 $\Sigma n_1 x_i^3$; $M_3$; $m_3$ | |
| 72 | : | 13 | 91 | Fx² | 22 | | 3 $\Sigma n_1 x_i^2$; $M_2$; $m_2$ | |
| 73 | x→П0 | 40 | 92 | : | 13 | | 4 $\Sigma n_1 x_1$; $M_1$; $m_1$ | |
| 74 | 0 | 00 | 93 | 3 | 03 | | 5 $\Sigma n_1$ | |
| 75 | . | 0— | 94 | — | 11 | | 6 $x_1$; $g_1$ | |
| 76 | 7 | 07 | 95 | x→П0 | 40 | | Д оперативный | |
| 77 | × | 12 | 96 | П→x2 | 62 | | | |
| 78 | П→x3 | 63 | 97 | П→x3 | 63 | | | |

Для обеих программ используется единая инструкция.

Инструкция V.1.3/54,52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Очистить сумматоры | | В/О С/П | |
| 2. Ввести очередные значения $n_1$, $x_1$ | $n_1$<br>$x_1$ | B↑<br>С/П | $n_1$<br>$x_1$ |
| 3. Если ввод закончен, далее, нет — к п. 2 | | | |
| 4. Вычислить значения начальных моментов: | | | |
| а) для программы V.1.3/54 | | БП 23 С/П | $M_1$—в рег. 4<br>$M_2$—в рег. 3<br>$M_3$—в рег. 2<br>$M_4$—в рег. X,1 |
| б) для программы V.1.3/52 | | БП 26 С/П | |
| 5. Вычислить значения центральных моментов без поправок | | С/П | $m_1$—в рег. 4<br>$m_2$—в рег. 3<br>$m_3$—в рег. 2<br>$m_4$—в рег. X,1 |
| 6. Ввести длину интервала h и вычислить центральные моменты, асимметрию и эксцесс с поправками Шеппарда | h | С/П | $g_1$—в рег. X,5<br>$m_1$—в рег. 4<br>$m_2$—в рег. 3<br>$m_3$—в рег. 2<br>$m_4$—в рег. 1<br>$g_2$—в рег. 0 |

Время счета: ввод одной пары очередных значений — 14 — 18 с, счет начальных моментов — 8 — 12 с, счет центральных моментов без поправок — 8 — 10 с, счет центральных моментов с поправками, асимметрии и эксцесса — 11 с.

*Пример.* Вычислить моменты выборки (h = 1,5).

$x_i$ = 3 9 4 6

$n_i$ = 10 3 2 2

Ответ:

| Начальные моменты | Центральные моменты без поправок | Центральные моменты с поправками, асимметрия и эксцесс |
|---|---|---|
| $M_1 = 4{,}5294$ | $m_1 = 4{,}5294$ | $m_1 = 4{,}5294$ |
| $M_2 = 25{,}706$ | $m_2 = 5{,}1903$ | $m_2 = 5{,}003$ |
| $M_3 = 177{,}47$ | $m_3 = 14{,}02$ | $m_3 = 14{,}02$ |
| $M_4 = 1388{,}06$ | $m_4 = 74{,}2686$ | $m_4 = 68{,}577$ |
| | | $g_1 = 1{,}2529$ |
| | | $g_2 = -0{,}26$ |

## V.2. ГИСТОГРАММА

### V.2.1. ГИСТОГРАММА ($k_{max}$ = 11 ИЛИ 12 ИНТЕРВАЛОВ)

Для построения гистограммы вводится число интервалов наблюдения k и границы изменения x : $x_{max}$ и $x_{min}$. Количество разбиений интервала в общем случае не превышает 11 ($k \leqslant 11$), однако при использовании МК — 52 замена в адресах 10 и 23 регистра памяти С на Е (вместо команд x → П С, П → xС устанавливаются соответственно x → П Е, П → x Е) увеличивает предельное значение k до 12 ($k \leqslant 12$).

Значения $m_i$ гистограммы помещаются программно в регистры памяти 1 — В (С), номер регистра совпадает с номером интервала.

Программа V.2.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | В↑ | 0E | 14 | П→x0 | 60 | 28 | + | 10 |
| 01 | F. | 25 | 15 | x→ПД | 4Г | 29 | Кx→ПД | LГ |
| 02 | — | 11 | 16 | Cx | 0Г | 30 | + | 10 |
| 03 | /—/ | 0L | 17 | Кx→ПД | LГ | 31 | F. | 25 |
| 04 | ←→ | 14 | 18 | + | 10 | 32 | БП | 51 |
| 05 | x→П0 | 40 | 19 | FL0 | 5Г | 33 | 21 | 21 |
| 06 | F $tg^{-1}$ | 1L | 20 | 14 | 14 | | | |
| 07 | F tg | 1E | 21 | С/П | 50 | | | |
| 08 | : | 13 | 22 | П→xС | 6С | | | |
| 09 | x→ПС | 4С | 23 | : | 13 | | | |
| 10 | : | 13 | 24 | — | 11 | | | |
| 11 | 1 | 01 | 25 | x→ПД | 4Г | | | |
| 12 | + | 10 | 26 | КП→xД | ГГ | | | |
| 13 | В↑ | 0E | 27 | 1 | 01 | | | |

Регистры

0 счетчик
1—В $m_1$—$m_{11}$
С $(x_{min}—x_{max})/k$
Д оперативный

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Переключатель Р/Г поставить в положение Р | | | |
| 2. Занести значения k, $x_{max}$, $x_{min}$ | k<br>$x_{max}$<br>$x_{min}$ | В↑<br>В↑<br>В/О С/П | |
| 3. Занести очередное значение $x_i$ | $x_i$ | С/П | $1-\frac{k \cdot x_{min}}{x_{max}-x_{min}}$ |
| 4. Если данные не исчерпаны — к п. 3, иначе прочесть результат | | | $m_1$—в рег. 1<br>$m_2$—в рег. 2<br>. . . . . .<br>$m_k$—в рег. k |

Время ввода k, $x_{max}$, $x_{min}$ — 15 с, время ввода одного значения $x_i$ — 4 с.

*Пример.* k = 5, $x_{max}$ = 17, $x_{min}$ = — 2,
$x_i$ = 3 0 4 6,5 8 —2 11 17 —1 2.
Ответ: $m_j$ = 3, 3, 2, 1, 1.

### V.2.2. ГИСТОГРАММА ($k_{max}$=22 ИНТЕРВАЛА)

Диапазон изменения переменной x делится на k = 22 равных интервала. Попадание x в каждый интервал фиксируется соответствующим счетчиком, содержащим четыре десятичных разряда одного из регистров памяти 1 — В. По окончании ввода данных содержимое счетчиков поочередно выводится на индикатор (от меньших x к большим).

Для построения гистограммы на меньшем числе интервалов ($k_1 < 22$) следует ввести верхнюю границу $x_{max}^{(k_1)}$ по формуле

$$x_{max}^{(k_1)} = x_{min} + 22\,(x_{max} - x_{min})/k_1$$

и по окончании ввода исходных данных опросить $k_1$ первых счетчиков

Программа V.2.2/54

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | ←→ | 14 | 07 | F tg | 1E | 14 | 12 | 12 |
| 01 | FBx | 0 | 08 | : | 13 | 15 | — | 11 |
| 02 | — | 11 | 09 | x→ПС | 4C | 16 | x→ПД | 4Г |
| 03 | 1 | 01 | 10 | : | 13 | 17 | КП→x1 | Г1 |
| 04 | 1 | 01 | 11 | 1 | 01 | 18 | 1 | 01 |
| 05 | x→П0 | 40 | 12 | Кx→ПВ↑ | LE | 19 | КП→xВ↑ | ГЕ |
| 06 | F $tg^{-1}$ | 1L | 13 | FL0 | 5Г | 20 | + | 10 |

*Продолжение*

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 21 | Кх→ПВ↑ | LE | 37 | 4 | 04 | 54 | × | 12 |
| 22 | С/П | 50 | 38 | /—/ | 0L | 55 | С/П | 50 |
| 23 | П→хС | 6С | 39 | F10$^x$ | 15 | 56 | П→хС | 6С |
| 24 | : | 13 | 40 | БП | 51 | 57 | 1 | 01 |
| 25 | П→хД | 6Г | 41 | 19 | 19 | 58 | — | 11 |
| 26 | — | 11 | 42 | 1 | 01 | 59 | С/П | 50 |
| 27 | х→П0 | 40 | 43 | 2 | 02 | 60 | БП | 51 |
| 28 | КП→хВ↑ | ГЕ | 44 | х→П0 | 40 | 61 | 45 | 45 |
| 29 | ←→ | 14 | 45 | КП→х0 | Г0 | | | |
| 30 | П→х0 | 60 | 46 | х→ПС | 4С | | Регистры | |
| 31 | — | 11 | 47 | КП→хС | ГС | | | |
| 32 | 2 | 02 | 48 | ←→ | 14 | 0 | счетчик | |
| 33 | F1/x | 23 | 49 | П→хС | 6С | 1 | —В гистограмма | |
| 34 | — | 11 | 50 | — | 11 | С | оперативный | |
| 35 | Fx⩾0 | 59 | 51 | 1 | 01 | Д | $11x_{max}/(x_{min}-x_{max})-1$ | |
| 36 | 18 | 18 | 52 | ВП | 0С | | | |
| | | | 53 | 4 | 04 | | | |

Программа V.2.2/52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | ←→ | 14 | 23 | + | 10 | 46 | х→ПС | 4С |
| 01 | FBx | 0 | 24 | Кх→ПД | LГ | 47 | КП→хС | ГС |
| 02 | — | 11 | 25 | С/П | 50 | 48 | ←→ | 14 |
| 03 | 1 | 01 | 26 | П→хС | 6С | 49 | П→хС | 6С |
| 04 | 1 | 01 | 27 | : | 13 | 50 | — | 11 |
| 05 | х→П0 | 40 | 28 | П→хЕ | 6Е | 51 | 1 | 01 |
| 06 | F ln | 18 | 29 | — | 11 | 52 | ВП | 0С |
| 07 | Fe$^x$ | 16 | 30 | х→ПД | 4Г | 53 | 4 | 04 |
| 08 | : | 13 | 31 | К{x} | 35 | 54 | × | 12 |
| 09 | х→ПС | 4С | 32 | 2 | 02 | 55 | С/П | 50 |
| 10 | : | 13 | 33 | F1/x | 23 | 56 | П→хС | 6С |
| 11 | 1 | 01 | 34 | — | 11 | 57 | 1 | 01 |
| 12 | П→х0 | 60 | 35 | Fx⩾0 | 59 | 58 | — | 11 |
| 13 | х→ПД | 4Г | 36 | 21 | 21 | 59 | С/П | 50 |
| 14 | F. | 25 | 37 | 4 | 04 | 60 | БП | 51 |
| 15 | Кх→ПД | LГ | 38 | /—/ | 0L | 61 | 45 | 45 |
| 16 | FL0 | 5Г | 39 | F10$^x$ | 15 | | | |
| 17 | 12 | 12 | 40 | БП | 51 | | Регистры | |
| 18 | — | 11 | 41 | 22 | 22 | | | |
| 19 | х→ПЕ | 4Е | 42 | 1 | 01 | 0 | счетчик | |
| 20 | КП→х1 | Г1 | 43 | 2 | 02 | 1 | —В гистограмма | |
| 21 | 1 | 01 | 44 | х→П0 | 40 | С,Д | оперативные | |
| 22 | КП→хД | ГГ | 45 | КП→х0 | Г0 | Е | $11x_{max}/(x_{min}-x_{max})-1$ | |

Для обеих гистограмм используется единая инструкция.

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Занести границы возможных значений переменной x | $x_{min}$<br>$x_{max}$ | В↑<br>В/О С/П | $x_{min}$<br>1 |
| 2. Занести очередное число $x_i$ | $x_i$ | С/П | |
| 3. Если данные исчерпаны, далее, нет — к п. 2 | | | |
| 4. Перейти к выводу результатов | | БП 42 | |
| 5. Вывести содержимое очередного счетчика | | С/П | $m_i$ |
| 6. Для продолжения вывода—к п. 5 | | | |

Время ввода $x_{min}$, $x_{max}$ — 15—25 с, время занесения одного числа — 7 с, время расшифровки содержимого счетчика — 2—5 с.

*Пример.* Построить гистограмму на три интервала выборки ($0{,}4 \leqslant x \leqslant 1$):

0,7 0,4 0,43 0,62 0,9 0,85 0,96

Решение. Введем $x_{min} = 0{,}4$, $x^{(3)}_{max} = 4{,}8$ и исходную выборку. Ответ: $m_i = 2{,}2{,}3$

## V.3. МЕРА ОТКЛОНЕНИЯ $\chi^2$

По программе вычисляется величина

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i},$$

где $m_i$ — количество случайных величин $x_j$, попавших в i-й интервал, $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$,

k — количество интервалов, $p_i$ — вероятность попадания $x_j$ в i-й интервал.

Гипотеза о принадлежности случайной выборки $x_j$ ($j = 1; 2; \ldots; n$) к генеральной совокупности с плотностью вероятности p (x) (с вероятностями $p_i$ попадания в i-й интервал) может быть проверена по таблицам $\chi^2$ [20] или по программе V.5.4.

### V.3.1. С ВВОДОМ *n*

Программа V.3.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | /—/ | 0L | 04 | Fx² | 22 | 08 | — | 11 |
| 01 | КНОП | 54 | 05 | /—/ | 0L | 09 | БП | 51 |
| 02 | 0 | 00 | 06 | ←→ | 14 | 10 | 03 | 03 |
| 03 | С/П | 50 | 07 | · | 13 | | | |

Инструкция V.3.1/54,52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Ввести n | n | В/О С/П | |
| 2. Занести очередную пару $p_i$, $m_i$ | $p_i$<br>$m_i$ | В↑<br>С/П | |
| 3. Если исходные данные исчерпаны, далее, иначе — к п. 2 | | | |
| 4. Вычислить $\chi^2$ | | БП 06 С/П | $\chi^2$ |

Время ввода n — 1 с, одной пары $p_i$, $m_i$ — 2 с; время вычисления $\chi^2$ — 2 с.

*Пример.* Вычислить величину $\chi^2$ при n = 16 для следующих значений ($p_i$; $m_i$):

0,1; 2 0,3; 5 0,4; 3 0,2; 6

Ответ: $\chi^2 = 4{,}365$.

### V.3.2. БЕЗ ВВОДА *n*

Программа V.3.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | Cx | 0Г | 08 | + | 10 | 16 | FBx | 0 |
| 01 | В↑ | 0Е | 09 | ←→ | 14 | 17 | — | 11 |
| 02 | ←→ | 14 | 10 | П→x2 | 62 | 18 | С/П | 50 |
| 03 | С/П | 50 | 11 | + | 10 | | | |
| 04 | x→П2 | 42 | 12 | БП | 51 | | Регистр | |
| 05 | Fx² | 22 | 13 | 02 | 02 | | | |
| 06 | ←→ | 14 | 14 | ←→ | 14 | 2 | $m_i$ | |
| 07 | : | 13 | 15 | : | 13 | | | |

Инструкция V.3.2/54,52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Очистить сумматоры | | В/О С/П | 0 |
| 2. Занести очередные значения $p_i$ и $m_i$ | $p_i$<br>$m_i$ | В↑<br>С/П | |
| 3. Если данные исчерпаны, далее, нет — к п. 2 | | | |
| 4. Вычислить $\chi^2$ | | БП 14 С/П | $\chi^2$ |

Время ввода пары чисел $p_i$ и $m_i$ — 3 с, время вычисления $\chi^2$ — 2с.

*Пример.* Вычислить величину $\chi^2$ для выборки

$p_1 = 0{,}1 \quad 0{,}4 \quad 0{,}3 \quad 0{,}2$

$m_1 = 3 \quad 14 \quad 8 \quad 5$

Ответ: $\chi^2 = 0{,}6111$.

## V.4. ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ

По приведенным программам вычисляется статистика t случайных наблюдений, которая используется для проверки исходной гипотезы. По полученной статистике t с помощью специальных таблиц (например, [14], [20]) находится соответствующий уровень значимости Q, и если эта величина мала ($Q < Q_0$, где $Q_0$ — пороговое значение, выбираемое обычно в пределах 0,01—0,1 исходя из условий эксперимента), то исходная гипотеза отвергается [19].

В некоторых из приведенных программ, кроме статистики t, вычисляется также приближенная оценка уровня значимости Q.

### V.4.1. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ О РАВЕНСТВЕ СРЕДНИХ

Проверяется гипотеза о том, что у двух групп парных наблюдений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$, принадлежащих двум нормально распределенным генеральным совокупностям с неизвестными средними $\mu_1$ и $\mu_2$, эти средние равны между собой: $\mu_1 = \mu_2$.

Вычисляется статистика t, имеющая распределение Стьюдента с n — 1 степенью свободы [14]:

$$t = \frac{\sqrt{n-1}\sum_i (x_i - y_i)}{\sqrt{n\sum_i (x_i - y_i)^2 - \left(\sum_i (x_i - y_i)\right)^2}}.$$

Программа V.4.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | Cx | 0Г | 11 | П→x4 | 64 | 22 | 1 | 01 |
| 01 | B↑ | 0E | 12 | + | 10 | 23 | П→x5 | 65 |
| 02 | x→П5 | 45 | 13 | ←→ | 14 | 24 | — | 11 |
| 03 | С/П | 50 | 14 | БП | 51 | 25 | : | 13 |
| 04 | — | 11 | 15 | 03 | 03 | 26 | F$\sqrt{\ }$ | 21 |
| 05 | x→П4 | 44 | 16 | FBx | 0 | 27 | : | 13 |
| 06 | Fx² | 22 | 17 | Fx² | 22 | 28 | С/П | 50 |
| 07 | + | 10 | 18 | ←→ | 14 | | | |
| 08 | ←→ | 14 | 19 | П→x5 | 65 | | Регистры | |
| 09 | КП→x5 | Г5 | 20 | × | 12 | | 4 оперативный | |
| 10 | F. | 25 | 21 | — | 11 | | 5 n | |

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Очистить сумматор | | В/О С/П | |
| 2. Ввести значения очередной пары данных | $x_1$<br>$y_1$ | В↑<br>С/П | |
| 3. Если данные исчерпаны, далее, нет — к п. 2 | | | |
| 4. Вычислить значение t | | БП 16 С/П | t |

Время занесения одной пары чисел — 4 с, вычисление — 4 с.

*Пример.* Проверить гипотезу о равенстве средних для группы нормально распределенных попарных наблюдений

$x_1 = 3,\ 5\ \ 4\ \ 5{,}5\ \ 3\ \ 4$

$y_1 = 2,\ 5\ \ 3\ \ \ 3\ \ \ 3\ \ 4{,}5$

Решение.

По программе вычисляется статистика t представленной пары выборок: t = 1,554. Затем по таблицам распределения Стьюдента определяется уровень значимости Q : Q (1,554/4) $\approx$ 0,2. Поэтому нет оснований отвергать гипотезу $\mu_1 = \mu_2$.

### V.4.2. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ О ВЕЛИЧИНЕ РАЗНОСТИ МЕЖДУ СРЕДНИМИ ДВУХ ВЫБОРОК

Проверяется гипотеза о том, что у пары независимых выборок $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ и $y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}$ — из двух генеральных совокупностей с нормальным распределением вероятностей и неизвестными средними значениями $\mu_1$ и $\mu_2$ разность $\mu_1 - \mu_2 = D$, где D — заданное число.

По программе V.4.2./54, 52 вычисляется статистика

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y} - D}{\left(\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)^{\frac{1}{2}}} \left[\left(\frac{n_1 S_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{n_2 S_2^2}{\sigma_2^2}\right) \Big/ (n_1 + n_2 - 2)\right]^{-\frac{1}{2}},$$

где

$$\bar{x} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} y_j;$$

$$S_1^2 = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} x_i^2 - (\bar{x})^2, \quad S_2^2 = \frac{1}{n_2} \sum_{j=1}^{n_2} y_j^2 - (\bar{y})^2.$$

Статистика t используется для решения двух задач:

а) дисперсии генеральных совокупностей $\sigma_1^2$ и $\sigma_2^2$ не равны и априори известны;

б) дисперсии генеральных совокупностей $\sigma_1^2$ и $\sigma_2^2$ равны, но априори неизвестны.

Статистика имеет распределение Стьюдента с $n_1 + n_2 - 2$ степенями свободы.

Уровень значимости Q ($t/n_1 + n_2 - 2$) определяется по программам V. 5.5 или с помощью таблиц распределения Стьюдента (например, [20]).

Программа V.4.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | П→x 2 | 62 | 26 | : | 13 | 52 | + | 10 |
| 01 | x→П 5 | 45 | 27 | x→П 2 | 42 | 53 | 2 | 02 |
| 02 | П→x 3 | 63 | 28 | F $x^2$ | 22 | 54 | — | 11 |
| 03 | x→П 6 | 46 | 29 | — | 11 | 55 | : | 13 |
| 04 | П→x 4 | 64 | 30 | x→П 3 | 43 | 56 | F $\sqrt{-}$ | 21 |
| 05 | x→П 7 | 47 | 31 | ←→ | 14 | 57 | x→П 0 | 40 |
| 06 | Cx | 0Г | 32 | БП | 51 | 58 | С/П | 50 |
| 07 | x→П 0 | 40 | 33 | 10 | 10 | 59 | /—/ | 0L |
| 08 | x→П 1 | 41 | 34 | П→x 4 | 64 | 60 | П→x 5 | 65 |
| 09 | x→П 4 | 44 | 35 | : | 13 | 61 | + | 10 |
| 10 | С/П | 50 | 36 | x→П 0 | 40 | 62 | П→x 2 | 62 |
| 11 | К П→x 4 | Г4 | 37 | ←→ | 14 | 63 | — | 11 |
| 12 | ←→ | 14 | 38 | П→x 7 | 67 | 64 | П→x 0 | 60 |
| 13 | В↑ | 0E | 39 | : | 13 | 65 | : | 13 |
| 14 | В↑ | 0E | 40 | x→П 1 | 41 | 66 | С/П | 50 |
| 15 | F $x^2$ | 22 | 41 | + | 10 | | | |
| 16 | П→x 1 | 61 | 42 | П→x 3 | 63 | | Регистры | |
| 17 | + | 10 | 43 | П→x 0 | 60 | | | |
| 18 | x→П 1 | 41 | 44 | : | 13 | 0 | $\Sigma y$ | |
| 19 | П→x 4 | 64 | 45 | П→x 6 | 66 | 1 | $\Sigma y^2$ | |
| 20 | : | 13 | 46 | П→x 1 | 61 | 2 | $\Sigma y/n_2$ | |
| 21 | ←→ | 14 | 47 | : | 13 | 3 | $[\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2/n_2]/n_2$ | |
| 22 | П→x 0 | 60 | 48 | + | 10 | 4 | $n_2$ | |
| 23 | + | 10 | 49 | × | 12 | 5 | $\Sigma x/n_1$ | |
| 24 | x→П 0 | 40 | 50 | П→x 7 | 67 | 6 | $[\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2/n_1]/n_1$ | |
| 25 | П→x 4 | 64 | 51 | П→x 4 | 64 | 7 | $n_1$ | |

Инструкция V.4.2/54,52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Перейти к вводу первой выборки | | В/О С/П | |
| 2. Ввести очередное значение $x_i$ | $x_i$ | С/П | $x_i$ |
| 3. Если первая выборка исчерпана, далее, нет — к п. 2 | | | |
| 4. Перейти к вводу второй выборки | | В/О С/П | |
| 5. Ввести очередное значение $y_j$ | $y_j$ | С/П | $y_j$ |
| 6. Если вторая выборка исчерпана, далее, нет — к п. 5: | | | |
| 7. а) если $\sigma_1^2$ и $\sigma_2^2$ известны | $\sigma_1^2$ | В↑ | |
| | $\sigma_2^2$ | БП 34 С/П | |
| б) если $\sigma_1^2$ и $\sigma_2^2$ неизвестны | 1 | В↑ БП 34 С/П | |
| 8. Ввести D и вычислить результат | D | С/П | t |

Время ввода числа — 6 с, ввода $\sigma_1^2$ и $\sigma_2^2$ — 7 с, время счета — 3 с.

*Пример.* Проверить гипотезу $\mu_1 - \mu_2 = 0$ ($D = 0$) для двух выборок с одинаковыми, но неизвестными дисперсиями

$x_i$ = 12 28 21 8 16

$y_j$ = 20 19 6

Ответ: t = 0,3506. По таблицам распределения Стьюдента [20] определяется уровень значимости Q (0,3506/6) $\simeq$ 0,744.

Поскольку Q $>$ 0,1, отвергать гипотезу $H_0$: D = 0 нет оснований.

### V.4.3. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ О РАВЕНСТВЕ СРЕДНЕГО ЗАДАННОМУ ЧИСЛУ

Для выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из нормально распределенной генеральной совокупности с неизвестными средним $\mu$ и дисперсией $\sigma^2$ проверяется гипотеза $\mu = \mu_0$, где $\mu_0$ — заданное число.

По программе вычисляется статистика t [14]

$$t = \frac{\sqrt{n-1}\left(\sum_i x_i - n\mu_0\right)}{\sqrt{n\sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2}},$$

имеющая распределение Стьюдента с n-1 степенью свободы.

По полученным значениям t и n-1 по таблицам распределения Стьюдента [14,20] или по программам V.5.5 вычисляется уровень значимости Q (t/n — 1).

Программа V.4.3/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | Cx | 0Г | 13 | БП | 51 | 26 | — | 11 |
| 01 | x→П 2 | 42 | 14 | 03 | 03 | 27 | : | 13 |
| 02 | x→П 4 | 44 | 15 | П→x 4 | 64 | 28 | F $\sqrt{\ }$ | 21 |
| 03 | x→П 3 | 43 | 16 | × | 12 | 29 | : | 13 |
| 04 | П→x 2 | 62 | 17 | — | 11 | 30 | С/П | 50 |
| 05 | С/П | 50 | 18 | П→x 3 | 63 | | | |
| 06 | + | 10 | 19 | П→x 4 | 64 | | Регистры | |
| 07 | x→П 2 | 42 | 20 | × | 12 | 2 | $\Sigma$ x | |
| 08 | К П→x 4 | Г4 | 21 | П→x 2 | 62 | 3 | $\Sigma$ $x^2$ | |
| 09 | F Bx | 0 | 22 | F $x^2$ | 22 | 4 | n | |
| 10 | F $x^2$ | 22 | 23 | — | 11 | | | |
| 11 | П→x 3 | 63 | 24 | П→x 4 | 64 | | | |
| 12 | + | 10 | 25 | 1 | 01 | | | |

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Очистить сумматоры | | В/О С/П | |
| 2. Занести очередное значение $x_i$ | $x_i$ | С/П | $\sum_{j=1}^{i} x_i$ |
| 3. Если данные исчерпаны, далее, нет — к п. 2 | | | |
| 4. Ввести $\mu_0$ и вычислить t | $\mu_0$ | БП 15 С/П | t |

Время ввода одного числа — 4 с, время вычисления t — 6 с.

*Пример.* Проверить гипотезу $H_0: \mu = \mu_0$, если $\mu_0 = 8$, для выборки 12, 8, 8, 11, 5.

Решение. По программе получаем t = 0,645, откуда по таблицам [20] определяем Q (0,645/4) = 0,56. Так как Q > 0,1, то нет оснований отвергать гипотезу $\mu_0 = 8$.

### V.4.4. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ О РАВЕНСТВЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДВУХ РЕДКИХ СОБЫТИЙ

Пусть на непересекающихся интервалах времени продолжительностью $t_1$ и $t_2$ произошло соответственно $k_1$ и $k_2$ событий. Если средние количества успехов за единицу времени

$$m_1 = \frac{k_1}{t_1} \text{ и } m_2 = \frac{k_2}{t_2}$$

различны, можно ли это различие считать случайным?

Статистика

$$\chi^2 = \frac{(k_1 t_2 - k_2 t_1)^2}{t_1 t_2 (k_1 + k_2)}$$

распределена по закону «хи-квадрат» с одной степенью свободы [20].

По программам определяется $\chi^2$ и уровень значимости Q. Используется приближенное соотношение [21]

$$Q \approx \exp(-(\chi^2)^{0,813}) \approx \exp(-6,5^{\lg \chi^2}).$$

Программа V.4.4/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | : | 36 | 04 | ←→ | 16 | 12 | × | 26 |
| 01 | P , | 43 | 05 | P 2 | 21 | 13 | ↑ | 06 |
| 02 | С/П | 78 | 10 | × | 26 | 14 | P /—/ | 53 |
| 03 | P /—/ | 53 | 11 | P , | 43 | 15 | + | 96 |

*Продолжение*

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 | P , | 43 | 33 | , | 46 |
| 21 | F 2 | 22 | 34 | 8 | 84 |
| 22 | — | 86 | 35 | 1 | 14 |
| 23 | F $x^2$ | 55 | 40 | 3 | 34 |
| 24 | ↑ | 06 | 41 | ←→ | 16 |
| 25 | P /—/ | 53 | 42 | $x^y$ | 38 |
| 30 | : | 36 | 43 | /—/ | 56 |
| 31 | P 2 | 21 | 44 | P $e^x$ | 33 |
| 32 | 0 | 04 | 45 | С/П | 78 |

Инструкция

$t_1$ ↑ $t_2$ В/О С/П $к_1$ ↑ $к_2$ С/П

Результат

Q

Регистры

2 $к_1$; $\chi^2$

S1 оперативный

Время вычисления — 7 с.

Программа V.4.4/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | ←→ | 14 | 13 | — | 11 | 26 | F $e^x$ | 16 |
| 01 | F . | 25 | 14 | F $x^2$ | 22 | 27 | С/П | 50 |
| 02 | : | 13 | 15 | ←→ | 14 | | | |
| 03 | x→П 0 | 40 | 16 | : | 13 | | | |
| 04 | ←→ | 14 | 17 | x→П 1 | 41 | | | |
| 05 | x→П 1 | 41 | 18 | F lg | 17 | | | |
| 06 | × | 12 | 19 | 6 | 06 | | | |
| 07 | ←→ | 14 | 20 | . | 0— | | | |
| 08 | П→x 0 | 60 | 21 | 5 | 05 | | | |
| 09 | × | 12 | 22 | F ln | 18 | | | |
| 10 | + | 10 | 23 | × | 12 | | | |
| 11 | F Bx | 0 | 24 | F $e^x$ | 16 | | | |
| 12 | П→x 1 | 61 | 25 | /—/ | 0L | | | |

Инструкция

$к_1$ В↑ $t_1$ В↑ $к_2$ В↑ $t_2$ В/О С/П

Результат

Q

Регистры

0 $t_1/t_2$

1 $к_1$; $\chi^2$

Время вычисления — 10 с.

*Пример.* $t_1 = 52$, $t_2 = 270$, $k_1 = 46$, $k_2 = 170$. $Q = 0{,}040$, $\chi^2 = 4{,}23$.

### V.4.5. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ О РАВЕНСТВЕ ВЕРОЯТНОСТИ ЗАДАННОМУ ЧИСЛУ

Пусть некоторое событие в n независимых опытах наступило m раз. Проверяется гипотеза о том, что вероятность этого события равна p.

Статистика

$$\chi^2 = \frac{(m - np)^2}{np(1-p)}$$

при $np \geqslant 3$—5 распределена по закону, близкому к закону распределения «хи-квадрат» с одной степенью свободы [23].

По программам рассчитываются величина $\chi^2$ и уровень значимости Q

$$Q = \exp\left(-(\chi^2)^{0,813}\right) \approx \exp\left(-6{,}5^{\lg \chi^2}\right).$$

Программа V.4.5/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Инструкция |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | × | 26 | 20 | P 2 | 21 | p ↑ n В/О С/П m С/П |
| 01 | ←→ | 16 | 21 | 0 | 04 | |
| 02 | × | 26 | 22 | , | 46 | |
| 03 | — | 86 | 23 | 8 | 84 | Результат |
| 04 | P 2 | 21 | 24 | 1 | 14 | Q |
| 05 | ←→ | 16 | 25 | 3 | 34 | |
| 10 | С/П | 78 | 30 | ←→ | 16 | |
| 11 | — | 86 | 31 | $x^y$ | 38 | Регистр |
| 12 | F $x^2$ | 55 | 32 | /—/ | 56 | |
| 13 | ↑ | 06 | 33 | P $e^x$ | 33 | 2 пр (1—p); $\chi^2$ |
| 14 | F 2 | 22 | 34 | С/П | 78 | |
| 15 | : | 36 | | | | |

Время вычисления — 8 с.

Программа V.4.5/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Инструкция |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 8 | 48 | 11 | x→П 8 | 48 | |
| 01 | × | 12 | 12 | F lg | 17 | m В↑ n В↑ p В/О С/П |
| 02 | — | 11 | 13 | 6 | 06 | |
| 03 | F Bx | 0 | 14 | . | 0— | Результат |
| 04 | F $\sqrt{}$ | 21 | 15 | 5 | 05 | Q |
| 05 | : | 13 | 16 | F ln | 18 | |
| 06 | F $x^2$ | 22 | 17 | × | 12 | |
| 07 | 1 | 01 | 18 | F $e^x$ | 16 | |
| 08 | П→x 8 | 68 | 19 | /—/ | 0L | Регистр |
| 09 | — | 11 | 20 | F $e^x$ | 16 | |
| 10 | : | 13 | 21 | С/П | 50 | 8 p; $\chi^2$ |

Время вычисления — 10 с.

*Пример.* m = 1, n = 10, p = 0,5.

Ответ: Q = 0,011, $\chi^2$ = 6,4.

При пятипроцентном, например, уровне значимости гипотезу о том, что вероятность исследуемого события равна 0,5, следует отвергнуть.

### V.4.6. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ ОБ ОДНОРОДНОСТИ ДВУХ ВЫБОРОК

Пусть имеются две выборки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ и $\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n$, каждая из которых состоит из независимых, непрерывных и одинаково распределенных случайных величин.

Для проверки гипотезы о том, что функции распределения случайных величин $\xi$ и $\xi'$ одинаковые, используется критерий $\omega^2$ [20].

Статистика T критерия $\omega^2$ зависит лишь от номеров порядковых элементов выборок в общем вариационном ряду и равна

$$T = \frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(r_i - i)^2 + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(s_j - j)^2 - \frac{1}{6}[4mn + m + n]}{\sqrt{(m+n+1)\left[m+n+1-\frac{3}{4mn}(m+n)^2\right]}} + \frac{1}{6},$$

где $r_i$, $s_i$ — порядковые номера элементов соответственно первой и второй выборок в общем вариационном ряду.

Критерий эффективен при m; $n \geqslant 5$—7.

По программе вычисляется статистика T и приближенная оценка уровня значимости Q [7]

$$Q = e^{-5{,}58 \cdot T}/\lg 32$$

с относительной погрешностью не более 5 % в области значений $1 \cdot 10^{-3} \leqslant Q \leqslant 1 \cdot 10^{-1}$. Для получения точных значений Q при вычисленном значении T можно воспользоваться таблицами, приведенными, например, в [20].

Гипотеза об однородности пары выборок отвергается, если уровень значимости Q меньше порогового значения $Q_0$ ($Q < Q_0$).

Для вычисления T следует предварительно расположить элементы обеих выборок в виде общего вариационного ряда в порядке возрастания их величин и выделить серии $l_к$ расположенных подряд элементов каждой выборки. Полученные значения $l_к$ являются исходными для расчета T и Q.

Программа V.4.6./54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | К НОП | 54 | 15 | П→х 5 | 65 | 30 | С/П | 50 |
| 01 | 0 | 00 | 16 | П→х 2 | 62 | 31 | БП | 51 |
| 02 | х→П 0 | 40 | 17 | + | 10 | 32 | 08 | 08 |
| 03 | х→П 1 | 41 | 18 | х→П 2 | 42 | 33 | П→х 2 | 62 |
| 04 | х→П 2 | 42 | 19 | — | 11 | 34 | 1 | 01 |
| 05 | х→П 3 | 43 | 20 | F $x^2$ | 22 | 35 | + | 10 |
| 06 | х→П 4 | 44 | 21 | П→х 5 | 65 | 36 | П→х 2 | 62 |
| 07 | + | 10 | 22 | × | 12 | 37 | F $x^2$ | 22 |
| 08 | х→П 5 | 45 | 23 | П→х 3 | 63 | 38 | 3 | 03 |
| 09 | П→х 0 | 60 | 24 | + | 10 | 39 | × | 12 |
| 10 | + | 10 | 25 | П→х 4 | 64 | 40 | П→х 1 | 61 |
| 11 | П→х 1 | 61 | 26 | х→П 3 | 43 | 41 | П→х 0 | 60 |
| 12 | х→П 0 | 40 | 27 | ←→ | 14 | 42 | × | 12 |
| 13 | ←→ | 14 | 28 | х→П 4 | 44 | 43 | 4 | 04 |
| 14 | х→П 1 | 41 | 29 | П→х 5 | 65 | 44 | × | 12 |

*Продолжение*

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 45 | x→П 5 | 45 | 59 | + | 10 | 73 | × | 12 |
| 46 | : | 13 | 60 | 6 | 06 | 74 | /—/ | 0L |
| 47 | — | 11 | 61 | : | 13 | 75 | F $e^x$ | 16 |
| 48 | × | 12 | 62 | — | 11 | 76 | 3 | 03 |
| 49 | F $\sqrt{\ }$ | 21 | 63 | ←→ | 14 | 77 | 2 | 02 |
| 50 | П→x 3 | 63 | 64 | : | 13 | 78 | F lg | 17 |
| 51 | П→x 1 | 61 | 65 | 6 | 06 | 79 | : | 13 |
| 52 | : | 13 | 66 | F 1/x | 23 | 80 | С/П | 50 |
| 53 | П→x 4 | 64 | 67 | + | 10 | | | |
| 54 | П→x 0 | 60 | 68 | x→П 5 | 45 | | Регистры | |
| 55 | : | 13 | 69 | 5 | 05 | | | |
| 56 | + | 10 | 70 | . | 0— | | 0—4 оперативные | |
| 57 | П→x 5 | 65 | 71 | 5 | 05 | | 5 Т | |
| 58 | П→x 2 | 62 | 72 | 8 | 08 | | | |

Инструкция V.4.6/54,52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Перейти к началу программы | | В/О | |
| 2. Занести длину очередной серии $l_к$ | $l_к$ | С/П | $l_к$ |
| 3. Если данные исчерпаны, далее, нет — к п. 2 | | | |
| 4. Вычислить Т и Q | | БП 33 С/П | Q—в рег. X<br>Т—в рег. 5 |

Время вычисления после ввода очередного $l_к$ — 8 с, время вычисления Т и Q — 18 с.

*Пример.* Даны две выборки

8, 15, 12, 6,

и 10, 18, 9, 14, 21, 16, 11

Вычислить Т и Q и проверить гипотезу об однородности этих выборок при $Q_0 = 0{,}1$.

Решение. Составим общий вариационный ряд и выделим серии элементов, принадлежащих одной и той же выборке (подчеркнуто),

6, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18, 21.

Длины серий (значения $l_к$) равны

2, 3, 1, 1, 1, 3.

Полученные таким образом значения $l_к$ введем в машину согласно инструкции.

Ответ: Т = 0,198, Q = 0,220; так как $Q > Q_0 = 0{,}1$, то принимается гипотеза об однородности представленной пары выборок

### V.4.7. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ НОРМАЛЬНОСТИ ПО ВЕЛИЧИНАМ АСИММЕТРИИ И ЭКСЦЕССА

Проверяется гипотеза о нормальности распределения случайной величины x, представленной выборкой объема n ($n \geqslant 4$).

Предварительно (например, по программе V. 1.2) вычисляется асимметрия $q_1$ и эксцесс $q_2$ исходной выборки. Если $q_1$ и $q_2$ существенно превышают свои гипотетические среднеквадратичные отклонения $\delta_1$ и $\delta_2$

$$\delta_1 = \left[\frac{6(n-1)}{(n+1)(n+3)}\right]^{1/2},$$

$$\delta_2 = \frac{1}{(n-1)}\left[\frac{24(n-2)(n-3)}{(n+3)(n+5)}\right]^{1/2},$$

то гипотеза о нормальности распределения случайной величины отвергается.

По программе вычисляются $\delta_1$ и $\delta_2$.

Программа V.4.7/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 1 | 41 | 15 | С/П | 50 |
| 01 | 1 | 01 | 16 | П→x 1 | 61 |
| 02 | — | 11 | 17 | 4 | 04 |
| 03 | 1 | 01 | 18 | × | 12 |
| 04 | П→x 1 | 61 | 19 | П→x 1 | 61 |
| 05 | + | 10 | 20 | П→x 0 | 60 |
| 06 | : | 13 | 21 | — | 11 |
| 07 | 6 | 06 | 22 | F L 0 | 5Г |
| 08 | × | 12 | 23 | 18 | 18 |
| 09 | П→x 1 | 61 | 24 | F $x^2$ | 22 |
| 10 | 3 | 03 | 25 | : | 13 |
| 11 | x→П 0 | 40 | 26 | 5 | 05 |
| 12 | + | 10 | 27 | БП | 51 |
| 13 | : | 13 | 28 | 04 | 04 |
| 14 | F $\sqrt{-}$ | 21 | | | |

Инструкция

n В/О С/П С/П

Результат

$\delta_1$, $\delta_2$

Регистры

0 оперативный
1 n

Время вычисления $\delta_1$ — 5 с, $\delta_2$ — 11 с.

*Пример.* n = 20. $\delta_1 = 0{,}486$, $\delta_2 = 0{,}841$.

### V.4.8. ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ НОРМАЛЬНОСТИ ПО КРИТЕРИЮ $\chi^2$

Проверяется гипотеза о том, что выборка $x_1, x_2, \ldots, x_n$ независимых наблюдений случайной величины x принадлежит генеральной совокупности, описываемой функцией нормального распределения $F_0(x)$ со средним значением $m_1$ и дисперсией $m_2$, определяемыми из выборки.

По программе вся область изменения x делится на 9 взаимно примыкающих интервалов, границы которых установлены так, что вероятность попадания случайной величины с функцией распределения $F_0(x)$ в каждый интервал равна 1/9. По исходной выборке вычисляется величина $\chi^2$ и уровень значимости Q (по критерию $\chi^2$ с 6 степенями свободы). По вычисленному значению Q проверяется гипотеза случайности отклонения наблюдавшихся частот от их ожидаемых значений [30].

Количество элементов выборки n следует брать не менее 30—50.

Алгоритм вычислений.

1. Предварительные операции:

а) вычисляются среднее значение $m_1$ и дисперсия $m_2$ исходной выборки (например, по программе V.1.1);

б) полученные значения $m_1$ и $m_2$ вводятся в калькулятор;

в) исходная выборка $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вводится в калькулятор;

2. Операции, выполняемые программно:

а) ось x делится на 9 интервалов.

Значение $x_i$ ($i = 1; 2; \ldots; n$) относится к интервалу k ($k = 1; 2; \ldots; 9$) по правилу

$$\frac{k-1}{9} \leqslant \Phi(z_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_i} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt < \frac{k}{9},$$

где

$$z_i = \frac{x_i - m_1}{\sqrt{m_2}},$$

а интеграл вероятности вычисляется приближенно по формуле

$$\tilde{\Phi}(z_i) = \frac{1}{2}\left[1 + \operatorname{sign}(z_i) \cdot \sqrt{1 - e^{-(0{,}792 \cdot z_i)^2}}\right];$$

б) определяется количество $c_k$ элементов исходной выборки, попавших в каждый интервал k ($k = 1; 2; \ldots; 9$);

в) по полученным значениям $c_k$ вычисляется величина

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{9} \frac{(c_k - n/9)^2}{n/9};$$

г) уровень значимости $Q(\chi^2/6)$ вычисляется по формуле [11]

$$Q(\chi^2/6) = e^{-\frac{\chi^2}{2}}\left[1 + \frac{\chi^2}{2}\left(1 + \frac{\chi^2}{4}\right)\right].$$

Программа V.4.8/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | F $\sqrt{\ }^{--}$ | 21 | 30 | F $x^2$ | 22 | 60 | F . | 25 |
| 01 | 6 | 06 | 31 | /—/ | 0L | 61 | К П→х А | Г— |
| 02 | . | 0— | 32 | F $e^x$ | 16 | 62 | П→х С | 6С |
| 03 | 2 | 02 | 33 | — | 11 | 63 | — | 11 |
| 04 | F lg | 17 | 34 | F $\sqrt{\ }^{-}$ | 21 | 64 | F $x^2$ | 22 |
| 05 | : | 13 | 35 | × | 12 | 65 | + | 10 |
| 06 | х→П Д | 4Г | 36 | 9 | 09 | 66 | F L0 | 5Г |
| 07 | ←→ | 14 | 37 | × | 12 | 67 | 58 | 58 |
| 08 | х→П С | 4С | 38 | 1 | 01 | 68 | П→х С | 6С |
| 09 | 9 | 09 | 39 | 1 | 01 | 69 | : | 13 |
| 10 | х→П 0 | 40 | 40 | + | 10 | 70 | х→П Д | 4Г |
| 11 | П→х 0 | 60 | 41 | 2 | 02 | 71 | 4 | 04 |
| 12 | х→П А | 4— | 42 | : | 13 | 72 | + | 10 |
| 13 | 0 | 00 | 43 | х→П В | 4L | 73 | П→х Д | 6Г |
| 14 | К х→П А | L— | 44 | К П→х В | ГL | 74 | × | 12 |
| 15 | F L 0 | 5Г | 45 | 1 | 01 | 75 | 2 | 02 |
| 16 | 11 | 11 | 46 | + | 10 | 76 | + | 10 |
| 17 | х→П 0 | 40 | 47 | К х→П В | LL | 77 | 8 | 08 |
| 18 | С/П | 50 | 48 | П→х 0 | 60 | 78 | : | 13 |
| 19 | П→х С | 6С | 49 | 1 | 01 | 79 | П→х Д | 6Г |
| 20 | — | 11 | 50 | + | 10 | 80 | F $e^x$ | 16 |
| 21 | П→х Д | 6Г | 51 | БП | 51 | 81 | F $\sqrt{\ }^{-}$ | 21 |
| 22 | : | 13 | 52 | 17 | 17 | 82 | : | 13 |
| 23 | В↑ | 0Е | 53 | 9 | 09 | 83 | С/П | 50 |
| 24 | ВП | 0С | 54 | х→П 0 | 40 | | | |
| 25 | F $x^2$ | 22 | 55 | : | 13 | | Регистры | |
| 26 | F $\sqrt{\ }$ | 21 | 56 | х→П С | 4С | | | |
| 27 | : | 13 | 57 | 0 | 00 | 0; | А—С оперативные | |
| 28 | 1 | 01 | 58 | П→х 0 | 60 | 1—9 | гистограмма | |
| 29 | F Вх | 0 | 59 | х→П А | 4— | Д | $\chi^2$ | |

Инструкция V.4.8/54,52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Занести параметры выборки $m_1$, $m_2$ | $m_1$ | В↑ | $m_1$ |
| | $m_2$ | В/О С/П | 0 |
| 2. Занести очередное значение $x_i$ | $x_i$ | С/П | i |
| 3. Если данные исчерпаны, далее, нет — к п. 2 | | | |
| 4. Определить уровень значимости | | БП 53 С/П | Q — в рег. X<br>$\chi^2$ — в рег. Д |
| 5. Для нового счета — к п. 2 | | | |

Время ввода $m_1$, $m_2$ — 22 с, занесения одного значения $x_1$ — 14 с, вычисления $\chi^2$, Q — 40 с.

*Пример.* Вычислить $\chi^2$ и Q для выборки из раздела V.1.1: $x_1 = -1, 3, 2, 0, 4$, $m_1 = 1{,}6$, $m_2 = 3{,}44$ (такая малая выборка взята только для примера).

Ответ: $\chi^2 = 4{,}0$; $Q = 0{,}575$.

### V.4.9. КРИТЕРИЙ ЗНАКОВ

Критерий знаков используется для проверки гипотезы о независимости и одинаковом распределении двух классов случайных величин x, y при одинаковом количестве элементов $n_1 = n_2 = n$ [23]. Согласно этому критерию попарно сравниваются значения $x_i$ и $y_i$ и из всех пар разностей $x_i - y_i$ определяется количество m положительных разностей $x_i - y_i > 0$, а пары, у которых $x_i = y_i$, из рассмотрения исключаются.

Вероятность того, что из n пар m или более разностей положительны, равна

$$P_n(m) = \frac{1}{2^n} \sum_{i=m}^{n} C_n^i.$$

По программе вычисляется $P_n(m)$ — уровень значимости критерия знаков

Программа V.4.9/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P 4 | 41 | 24 | P x≠0 | 79 | 52 | + | 96 |
| 01 | ←→ | 16 | 25 | /—/ | 56 | 53 | БП | 58 |
| 02 | — | 86 | 30 | F 4 | 42 | 54 | ←→ | 16 |
| 03 | 1 | 14 | 31 | ↑ | 06 | 55 | F 3 | 32 |
| 04 | + | 96 | 32 | F 5 | 52 | 60 | С/П | 78 |
| 05 | P 5 | 51 | 33 | — | 86 | | | |
| 10 | F 4 | 42 | 34 | 1 | 14 | | Инструкция | |
| 11 | /—/ | 56 | 35 | + | 96 | | | |
| 12 | 2 | 24 | 40 | ↑ | 06 | | m ↑ n В/О С/П | |
| 13 | $x^y$ | 38 | 41 | F 5 | 52 | | | |
| 14 | P 2 | 21 | 42 | : | 36 | | Регистры | |
| 15 | P 3 | 31 | 43 | ↑ | 06 | | | |
| 20 | F 5 | 52 | 44 | F 3 | 32 | | 2 $x^{-n}$ | |
| 21 | 1 | 14 | 45 | × | 26 | | 3 P | |
| 22 | — | 86 | 50 | ↑ | 06 | | 4 n | |
| 23 | P 5 | 51 | 51 | F 2 | 22 | | 5 оперативный | |

Время вычисления — $T = 3(n + 3 - m)$ с.

Программа V.4.9/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 0 | 40 | 12 | 22 | 22 | 24 | С/П | 50 |
| 01 | ←→ | 14 | 13 | П→x 0 | 60 | | | |
| 02 | — | 11 | 14 | П→x 1 | 61 | | Инструкция | |
| 03 | 1 | 01 | 15 | — | 11 | | | |
| 04 | + | 10 | 16 | 1 | 01 | | m В↑ n В/О С/П | |
| 05 | x→П 1 | 41 | 17 | + | 10 | | | |
| 06 | П→x 0 | 60 | 18 | П→x 1 | 61 | | Регистры | |
| 07 | /—/ | 0L | 19 | : | 13 | | | |
| 08 | 2 | 02 | 20 | × | 12 | | 0 n | |
| 09 | F $x^y$ | 24 | 21 | + | 10 | | 1 оперативный | |
| 10 | В↑ | 0E | 22 | F L1 | 5L | | | |
| 11 | БП | 51 | 23 | 13 | 13 | | | |

Время вычисления $T = 3\,(n + 2 - m)$ с.

*Пример.* Проверить гипотезу независимости и одинакового распределения признаков при $n = 15$, $m = 10$.

Ответ: $P_{15}\,(10) = 0{,}151$.

Выбрав, например, доверительный уровень 0,1, получаем, что гипотезу о принадлежности x и y одной и той же генеральной совокупности следует принять.

### V.4.10. КРИТЕРИЙ ВИЛКОКСОНА

Критерий Вилкоксона используется для проверки гипотезы об относительной несмещенности двух групп наблюдений. Располагая всю совокупность обоих наблюдений в единый вариационный ряд, запишем полученный ряд в виде

$$x_1, y_1; x_2, y_2; \ldots; x_к, y_к; \ldots ,$$

где $x_к$ —количество наблюдений группы x, таких, что все значения x, относящиеся к $x_к$, по величине меньше значений y, относящихся к группе $y_к$, и больше значений наблюдений y, относящихся к группе $y_{к-1}$; аналогично для $y_к$ и т. д.

Пусть m — полное количество элементов группы x, а n —полное количество элементов группы y. Для проверки гипотезы относительной несмещенности используется количество инверсий в общем вариационном ряду. Вычисляется количество инверсий и соответствующий уровень значимости.

Приводятся два способа вычисления: по точной и приближенной формулам.

Уровень значимости критерия. Вилкоксона вычисляется путем расчета относительного числа состояний, при которых количество инверсий оказывается не более полученного из выборки (порогового уровня). Ограничение на $\Sigma x_1 : \Sigma x_1 \leqslant 9$, ограничений на $\Sigma y_1$ нет.

### V.4.10.1.1. Односторонний критерий Вилкоксона

Вычисляется М —количество инверсий у относительно х и соответствующий уровень значимости Р: относительное число возможных состояний, при которых число инверсий не превышает М.

Программа V.4.10.1.1/54

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | К НОП | 54 | 32 | x→П Д | 4Г | 64 | F x≥0 | 59 |
| 01 | 0 | 00 | 33 | П→x 0 | 60 | 65 | 75 | 75 |
| 02 | x→П 1 | 41 | 34 | 1 | 01 | 66 | F L0 | 5Г |
| 03 | x→П А | 4— | 35 | — | 11 | 67 | 62 | 62 |
| 04 | x→П В | 4L | 36 | x→П 0 | 40 | 68 | П→x С | 6С |
| 05 | x→П С | 4С | 37 | F x≠0 | 57 | 69 | 1 | 01 |
| 06 | x→П Д | 4Г | 38 | 78 | 78 | 70 | + | 10 |
| 07 | F . | 25 | 39 | К П→x В↑ | ГЕ | 71 | x→П С | 4С |
| 08 | В↑ | 0Е | 40 | В↑ | 0Е | 72 | П→x А | 6— |
| 09 | П→x В | 6L | 41 | П→x 0 | 60 | 73 | БП | 51 |
| 10 | + | 10 | 42 | — | 11 | 74 | 36 | 36 |
| 11 | x→П В | 4L | 43 | П→x В | 6L | 75 | П→x А | 6— |
| 12 | F . | 25 | 44 | — | 11 | 76 | БП | 51 |
| 13 | ←→ | 14 | 45 | F x<0 | 5С | 77 | 34 | 34 |
| 14 | П→x А | 6— | 46 | 33 | 33 | 78 | П→x А | 6— |
| 15 | + | 10 | 47 | ←→ | 14 | 79 | x→П 0 | 40 |
| 16 | x→П А | 4— | 48 | 1 | 01 | 80 | П→x С | 6С |
| 17 | × | 12 | 49 | + | 10 | 81 | П→x В | 6L |
| 18 | П→x Д | 6Г | 50 | К x→П В↑ | LE | 82 | П→x 0 | 60 |
| 19 | + | 10 | 51 | П→x А | 6— | 83 | + | 10 |
| 20 | x→П Д | 4Г | 52 | П→x 0 | 60 | 84 | : | 13 |
| 21 | С/П | 50 | 53 | 1 | 01 | 85 | П→x 0 | 60 |
| 22 | БП | 51 | 54 | + | 10 | 86 | × | 12 |
| 23 | 08 | 08 | 55 | x→П 0 | 40 | 87 | F L0 | 5Г |
| 24 | П→x А | 6— | 56 | — | 11 | 88 | 81 | 81 |
| 25 | В↑ | 0Е | 57 | F x<0 | 5С | 89 | С/П | 50 |
| 26 | F $x^2$ | 22 | 58 | 47 | 47 | | | |
| 27 | + | 10 | 59 | П→x А | 6— | | Регистры | |
| 28 | 2 | 02 | 60 | x→П 0 | 40 | | | |
| 29 | x→П 0 | 40 | 61 | П→x Д | 6Г | 0—9,С,Д | оперативные | |
| 30 | : | 13 | 62 | К П→x В↑ | ГЕ | А | n | |
| 31 | + | 10 | 63 | — | 11 | В | m | |

Программа V.4.10.1.1/52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | К НОП | 54 | 34 | 1 | 01 | 68 | — | 11 |
| 01 | 0 | 00 | 35 | — | 11 | 69 | F x⩾0 | 59 |
| 02 | x→П 1 | 41 | 36 | x→П 0 | 40 | 70 | 80 | 80 |
| 03 | x→П A | 4— | 37 | x→П E | 4E | 71 | F L0 | 5Г |
| 04 | x→П B | 4L | 38 | F x≠0 | 57 | 72 | 64 | 64 |
| 05 | x→П C | 4C | 39 | 83 | 83 | 73 | П→x C | 6C |
| 06 | x→П Д | 4Г | 40 | К П→x E | ГЕ | 74 | 1 | 01 |
| 07 | F . | 25 | 41 | B↑ | 0E | 75 | + | 10 |
| 08 | B↑ | 0E | 42 | П→x 0 | 60 | 76 | x→П C | 4C |
| 09 | П→x B | 6L | 43 | — | 11 | 77 | П→x A | 6— |
| 10 | + | 10 | 44 | П→x B | 6L | 78 | БП | 51 |
| 11 | x→П B | 4L | 45 | — | 11 | 79 | 36 | 36 |
| 12 | F . | 25 | 46 | F x<0 | 5C | 80 | П→x A | 6— |
| 13 | ←→ | 14 | 47 | 33 | 33 | 81 | БП | 51 |
| 14 | П→x A | 6— | 48 | ←→ | 14 | 82 | 34 | 34 |
| 15 | + | 10 | 49 | 1 | 01 | 83 | П→x A | 6— |
| 16 | x→П A | 4— | 50 | + | 10 | 84 | x→П 0 | 40 |
| 17 | × | 12 | 51 | К x→П E | LE | 85 | П→x C | 6C |
| 18 | П→x Д | 6Г | 52 | П→x A | 6— | 86 | П→x B | 6L |
| 19 | + | 10 | 53 | П→x 0 | 60 | 87 | П→x 0 | 60 |
| 20 | x→П Д | 4Г | 54 | 1 | 01 | 88 | + | 10 |
| 21 | С/П | 50 | 55 | + | 10 | 89 | : | 13 |
| 22 | БП | 51 | 56 | x→П 0 | 40 | 90 | П→x 0 | 60 |
| 23 | 08 | 08 | 57 | x→П E | 4E | 91 | × | 12 |
| 24 | П→x A | 6— | 58 | — | 11 | 92 | F L0 | 5Г |
| 25 | B↑ | 0E | 59 | F x<0 | 5C | 93 | 86 | 86 |
| 26 | F $x^2$ | 22 | 60 | 48 | 48 | 94 | С/П | 50 |
| 27 | + | 10 | 61 | П→x A | 6— | | | |
| 28 | 2 | 02 | 62 | x→П 0 | 40 | | Регистры | |
| 29 | x→П 0 | 40 | 63 | П→x Д | 6Г | | | |
| 30 | : | 13 | 64 | П→x 0 | 60 | 0—9,C—E оперативные | | |
| 31 | + | 10 | 65 | x→П E | 4E | | | |
| 32 | x→П Д | 4Г | 66 | ←→ | 14 | A | n | |
| 33 | П→x 0 | 60 | 67 | К П→x E | ГЕ | B | m | |

Для обеих программ используется единая инструкция.

Инструкция V.4.10.1.1/54,52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Перейти к началу программы | | В/О | |
| 2. Ввести пару значений $x_i$, $y_i$ | $x_i$ | B↑ | $x_i$ |
| | $y_i$ | С/П | $M_i$ |
| 3. Если данные исчерпаны, далее, иначе — к п. 2 | | | |
| 4. Вычислить уровень значимости P | | БП 24 С/П | P |

*Пример.* Вычислить количество инверсий $M$ и уровень значимости $P$ для выборки, состоящей из $x_1 = 0$, $y_1 = 3$; $x_2 = 1$, $y_2 = 1$; $x_3 = 2$, $y_3 = 0$.

Решение. Введя согласно инструкции попарно исходные значения $x_i$, $y_i$ ($i = 1 — 3$), получаем $M = 1$, $P = 0{,}057$. Время вычисления примера около 6 мин.

### V.4.10.1.2. Двусторонний критерий Вилкоксона

Вычисляется количество $M_1$ инверсий y относительно x и $M_2$ — количество инверсий x относительно y, а также уровень значимости P — относительное число возможных инверсий, не превышающих минимальное из $M_1$ и $M_2$.

Программа V.4.10.1.2/54

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | С/П | 50 | 35 | x→П Д | 4Г | 70 | 65 | 65 |
| 01 | В↑ | 0Е | 36 | П→x 0 | 60 | 71 | П→x С | 6С |
| 02 | П→x В | 6L | 37 | 1 | 01 | 72 | 2 | 02 |
| 03 | + | 10 | 38 | — | 11 | 73 | + | 10 |
| 04 | x→П В | 4L | 39 | x→П 0 | 40 | 74 | x→П С | 4С |
| 05 | F . | 25 | 40 | F x≠0 | 57 | 75 | П→x А | 6— |
| 06 | ←→ | 14 | 41 | 81 | 81 | 76 | БП | 51 |
| 07 | П→x А | 6— | 42 | К П→x В↑ | ГЕ | 77 | 39 | 39 |
| 08 | + | 10 | 43 | В↑ | 0Е | 78 | П→x А | 6— |
| 09 | x→П А | 4— | 44 | П→x 0 | 60 | 79 | БП | 51 |
| 10 | × | 12 | 45 | — | 11 | 80 | 37 | 37 |
| 11 | П→x Д | 6Г | 46 | П→x В | 6L | 81 | П→x А | 6— |
| 12 | + | 10 | 47 | — | 11 | 82 | x→П 0 | 40 |
| 13 | x→П Д | 4Г | 48 | F x<0 | 5С | 83 | П→x С | 6С |
| 14 | БП | 51 | 49 | 36 | 36 | 84 | П→x В | 6L |
| 15 | 00 | 00 | 50 | ←→ | 14 | 85 | П→x 0 | 60 |
| 16 | П→x А | 6— | 51 | 1 | 01 | 86 | + | 10 |
| 17 | П→x В | 6L | 52 | + | 10 | 87 | : | 13 |
| 18 | × | 12 | 53 | К x→П В↑ | LE | 88 | П→x 0 | 60 |
| 19 | П→x Д | 6Г | 54 | П→x А | 6— | 89 | × | 12 |
| 20 | — | 11 | 55 | П→x 0 | 60 | 90 | F L0 | 5Г |
| 21 | — | 11 | 56 | 1 | 01 | 91 | 84 | 84 |
| 22 | F x≥0 | 59 | 57 | + | 10 | 92 | F ln | 18 |
| 23 | 26 | 26 | 58 | x→П 0 | 40 | 93 | F x>0 | 59 |
| 24 | F Вх | 0 | 59 | — | 11 | 94 | 97 | 97 |
| 25 | x→П Д | 4Г | 60 | F x<0 | 5С | 95 | 1 | 01 |
| 26 | П→x Д | 6Г | 61 | 50 | 50 | 96 | F . | 25 |
| 27 | П→x А | 6— | 62 | П→x А | 6— | 97 | F Вх | 0 |
| 28 | В↑ | 0Е | 63 | x→П 0 | 40 | 98 | С/П | 50 |
| 29 | F x² | 22 | 64 | П→x Д | 6Г | | Регистры | |
| 30 | + | 10 | 65 | К П→x В↑ | ГЕ | | | |
| 31 | 2 | 02 | 66 | — | 11 | 0—9,С,Д | оперативные | |
| 32 | x→П 0 | 40 | 67 | F x>0 | 59 | А | n | |
| 33 | : | 13 | 68 | 78 | 78 | В | m | |
| 34 | + | 10 | 69 | F L0 | 5Г | | | |

Программа V.4.10.1.2/52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | С/П | 50 | 36 | П→х Е | 6Е | 72 | F L0 | 5Г |
| 01 | В↑ | 0Е | 37 | 1 | 01 | 73 | 65 | 65 |
| 02 | П→х В | 6L | 38 | — | 11 | 74 | П→х С | 6С |
| 03 | + | 10 | 39 | х→П Е | 4Е | 75 | 2 | 02 |
| 04 | х→П В | 4L | 40 | F x≠0 | 57 | 76 | + | 10 |
| 05 | F . | 25 | 41 | 84 | 84 | 77 | х→П С | 4С |
| 06 | ←→ | 14 | 42 | К П→х Е | ГЕ | 78 | П→х А | 6— |
| 07 | П→х А | 6— | 43 | В↑ | 0Е | 79 | БП | 51 |
| 08 | + | 10 | 44 | П→х Е | 6Е | 80 | 39 | 39 |
| 09 | х→П А | 4— | 45 | — | 11 | 81 | П→х А | 6— |
| 10 | × | 12 | 46 | П→х В | 6L | 82 | БП | 51 |
| 11 | П→х Д | 6Г | 47 | — | 11 | 83 | 37 | 37 |
| 12 | + | 10 | 48 | F x<0 | 5С | 84 | П→х А | 6— |
| 13 | х→П Д | 4Г | 49 | 36 | 36 | 85 | х→П 0 | 40 |
| 14 | БП | 51 | 50 | ←→ | 14 | 86 | П→х С | 6С |
| 15 | 00 | 00 | 51 | 1 | 01 | 87 | П→х В | 6L |
| 16 | П→х А | 6— | 52 | + | 10 | 88 | П→х 0 | 60 |
| 17 | П→х В | 6L | 53 | К х→П Е | LE | 89 | + | 10 |
| 18 | × | 12 | 54 | П→х А | 6— | 90 | : | 13 |
| 19 | П→х Д | 6Г | 55 | П→х Е | 6Е | 91 | П→х 0 | 60 |
| 20 | — | 11 | 56 | 1 | 01 | 92 | × | 12 |
| 21 | — | 11 | 57 | + | 10 | 93 | F L0 | 5Г |
| 22 | F x⩾0 | 59 | 58 | х→П Е | 4Е | 94 | 87 | 87 |
| 23 | 26 | 26 | 59 | — | 11 | 95 | F ln | 18 |
| 24 | F Bx | 0 | 60 | F x<0 | 5С | 96 | F x⩾0 | 59 |
| 25 | х→П Д | 4Г | 61 | 50 | 50 | 97 | . 0 | —0 |
| 26 | П→х Д | 6Г | 62 | П→х А | 6— | 98 | 1 | 01 |
| 27 | П→х А | 6— | 63 | х→П 0 | 40 | 99 | F . | 25 |
| 28 | В↑ | 0Е | 64 | П→х Д | 6Г | 100 | F Bx | 0 |
| 29 | F $x^2$ | 22 | 65 | П→х 0 | 60 | 101 | С/П | 50 |
| 30 | + | 10 | 66 | х→П Е | 4Е | | | |
| 31 | 2 | 02 | 67 | ←→ | 14 | | Регистры | |
| 32 | х→П Е | 4Е | 68 | К П→х Е | ГЕ | | | |
| 33 | : | 13 | 69 | — | 11 | 0—9,С—Е оперативные | | |
| 34 | + | 10 | 70 | F x⩾0 | 59 | А | п | |
| 35 | х→П Д | 4Г | 71 | 81 | 81 | В | m | |

Для обеих программ используется единая инструкция.

Инструкция V.4.10.1.2/54,52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Обнулить регистры памяти | 0 | х→П (1—Д) | 0 |
| 2. Перейти к началу программы | | В О С/П | |
| 3. Ввести пару значений $x_i$, $y_i$ | $x_i$ | В↑ | $x_i$ |
| | $y_i$ | С/П | $M_{i,1}$ |
| 4. Если данные исчерпаны, далее, иначе — к п. 3 | | | |
| 5. Вычислить уровень значимости Р | | БП 16 С/П | Р |

*Пример.* Вычислить количество инверсий $M_1$ и $M_2$ и уровень значимости P двустороннего критерия Вилкоксона для выборки, состоящей из $x_1 = 3$, $y_1 = 1$; $x_2 = 1$, $y_2 = 2$.

Решение. Введя исходные значения $x_i$, $y_i$ ($i = 1, 2$), получаем $M_1 = 11$, $M_2 = nm - M_1 = 1$, $P = 0{,}114$.

Время вычисления примера — 10 мин.

### V.4.10.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ P

При больших значениях $n = \sum_i x_i$ и $m = \sum_i y_i$, если верна нулевая гипотеза, число инверсий M распределено асимптотически нормально со средним значением $a = \frac{n \cdot m}{12}$ и дисперсией $\sigma^2 = \frac{n \cdot m}{2}(n + m + 1)$ [23].

По программе вычисляется число инверсий $M_1$ у относительно x и уровень значимости P, для вычисления которого используется приближенное представление интеграла вероятностей

$$\Phi(z) \simeq \sqrt{1 - e^{\frac{-2z^2}{\pi}}}, \quad \text{где } z^2 = \frac{(a - M)^2}{\sigma^2}.$$

Программа V.4.10.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | К НОП | 54 | 19 | С/П | 50 | 38 | + | 10 |
| 01 | 0 | 00 | 20 | БП | 51 | 39 | : | 13 |
| 02 | x→П A | 4— | 21 | 06 | 06 | 40 | 6 | 06 |
| 03 | x→П B | 4L | 22 | 1 | 01 | 41 | × | 12 |
| 04 | x→П C | 4C | 23 | ←→ | 14 | 42 | F π | 20 |
| 05 | F . | 25 | 24 | 2 | 02 | 43 | : | 13 |
| 06 | B↑ | 0E | 25 | × | 12 | 44 | /—/ | 0L |
| 07 | П→x B | 6L | 26 | П→x A | 6— | 45 | F $e^x$ | 16 |
| 08 | + | 10 | 27 | П→x B | 6L | 46 | — | 11 |
| 09 | x→П B | 4L | 28 | × | 12 | 47 | F √ | 21 |
| 10 | F . | 25 | 29 | — | 11 | 48 | — | 11 |
| 11 | ←→ | 14 | 30 | F Bx | 0 | 49 | С/П | 50 |
| 12 | П→x A | 6— | 31 | F √ | 21 | | | |
| 13 | + | 10 | 32 | : | 13 | | Регистры | |
| 14 | x→П A | 4— | 33 | F $x^2$ | 22 | | | |
| 15 | × | 12 | 34 | П→x A | 6— | | A n | |
| 16 | П→x C | 6C | 35 | П→x B | 6L | | B m | |
| 17 | + | 10 | 36 | + | 10 | | C $M_1$ | |
| 18 | x→П C | 4C | 37 | 1 | 01 | | | |

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Перейти к началу программы | | В/О | |
| 2. Ввести пару значений $x_i$, $y_i$ | $x_i$ | В↑ | |
| | $y_i$ | С/П | $M_{1i}$ |
| 3. Если данные исчерпаны, далее, иначе — к п. 2 | | | |
| 4. Вычислить уровень значимости P | | БП 22 С/П | P |

Время ввода одной пары значений $x_i$, $y_i$ — 4 с, время вычисления P после ввода последней пары значений $x_i$, $y_i$ — 11 с.

*Пример.* Вычислить число инверсий $M_1$ и уровень значимости P двустороннего критерия Вилкоксона для выборки, состоящей из $x_1 = 0$, $y_1 = 2$; $x_2 = 1$, $y_2 = 1$; $x_3 = 3$, $y_3 = 0$.

Решение. Введем попарно набор значений $x_i$, $y_i$ ($i = 1 - 3$), в результате получаем $M_1 = 1$, $P = 0{,}07$.

### V.4.11. КРИТЕРИЙ АББЕ

Если случайная величина x подчиняется нормальному закону распределения, то для проверки независимости соседних измерений используется критерий Аббе, основанный на статистике u

$$u = k \cdot \sqrt{\frac{2n+1}{2-k^2}},$$

где n — количество измерений, $k = \frac{S_1^2}{2S^2} - 1$,

$$S_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^2, \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left( x_i - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j \right)^2.$$

При независимости значений x статистика u распределена асимптотически нормально со средним значением 0 и дисперсией 1.

По приведенной программе вычисляется статистика u и соответствующий уровень значимости P двустороннего критерия согласия при допущении о нормальности закона распределения u и использовании приближенного значения $\Phi(u) \simeq \sqrt{1 - e^{\frac{-2}{\pi} u^2}}$.

Программа V.4.11/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 4 | 44 | 26 | С/П | 50 | 52 | ←→ | 14 |
| 01 | 0 | 00 | 27 | БП | 51 | 53 | : | 13 |
| 02 | x→П 6 | 46 | 28 | 07 | 07 | 54 | F $\sqrt{}$ | 21 |
| 03 | x→П 7 | 47 | 29 | 1 | 01 | 55 | П→x 8 | 68 |
| 04 | x→П 8 | 48 | 30 | П→x 7 | 67 | 56 | × | 12 |
| 05 | x→П 9 | 49 | 31 | П→x 8 | 68 | 57 | x→П 8 | 48 |
| 06 | ←→ | 14 | 32 | F $x^2$ | 22 | 58 | F $x^2$ | 22 |
| 07 | x→П 5 | 45 | 33 | П→x 6 | 66 | 59 | 2 | 02 |
| 08 | П→x 4 | 64 | 34 | : | 13 | 60 | × | 12 |
| 09 | — | 11 | 35 | — | 11 | 61 | F $\pi$ | 20 |
| 10 | F $x^2$ | 22 | 36 | П→x 9 | 69 | 62 | : | 13 |
| 11 | П→x 9 | 69 | 37 | ←→ | 14 | 63 | —/— | 0L |
| 12 | + | 10 | 38 | : | 13 | 64 | F $e^x$ | 16 |
| 13 | x→П 9 | 49 | 39 | 2 | 02 | 65 | — | 11 |
| 14 | П→x 5 | 65 | 40 | : | 13 | 66 | F $\sqrt{}$ | 21 |
| 15 | x→П 4 | 44 | 41 | 1 | 01 | 67 | — | 11 |
| 16 | F $x^2$ | 22 | 42 | — | 11 | 68 | П→x 8 | 68 |
| 17 | П→x 7 | 67 | 43 | x→П 8 | 48 | 69 | С/П | 50 |
| 18 | + | 10 | 44 | F $x^2$ | 22 | | | |
| 19 | x→П 7 | 47 | 45 | — | 11 | | Регистры | |
| 20 | П→x 5 | 65 | 46 | + | 10 | | | |
| 21 | П→x 8 | 68 | 47 | П→x 6 | 66 | 4;5 | оперативные | |
| 22 | + | 10 | 48 | 2 | 02 | 6 | n | |
| 23 | x→П 8 | 48 | 49 | × | 12 | 7 | $\Sigma x^2$ | |
| 24 | К П→x 6 | Г6 | 50 | 1 | 01 | 8 | $\Sigma x$; u | |
| 25 | П→x 6 | 66 | 51 | + | 10 | 9 | $\Sigma (x_i - x_{i-1})^2$ | |

Инструкция V.4.11/54,52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Перейти к началу программы | | В/О | |
| 2. Ввести очередное значение $x_i$ | $x_i$ | С/П | i |
| 3. Если данные исчерпаны, далее, иначе — к п. 2 | | | |
| 4. Вычислить u и P | | БП 29 С/П | P—в рег. X<br>u—в рег. Y |

Время ввода одного числа $x_i$ — 7 с, время вычисления u и P после ввода последнего $x_n$ — 15 с.

*Пример*. Проверить независимость соседних элементов массива

1, 3, 5, 2, 6, 1.

Ответ: u = 0,8326; P = 0,403.

## V.4.12. КРИТЕРИЙ СЕРИЙ

Критерий серий служит для проверки случайности расположения элементов двух классов наблюдений, представленных в виде единого вариационного ряда. Рассматривается статистика

$$u = \frac{(k-0{,}5)(m+n)-2mn}{\sqrt{2mn\,\frac{2mn-m-n}{m+n-1}}},$$

где m, n — соответственно количество элементов первого и второго классов;
k — количество серий: количество групп элементов, принадлежащих одному классу.

Статистика u имеет асимптотически (при $m, n \to \infty$) нормальное распределение $N(0; 1)$.

По программе вычисляется статистика u и уровень значимости P при использовании двустороннего критерия и замене интеграла вероятностей его приближенным значением $\Phi(u) \simeq \sqrt{1 - e^{-\frac{2}{\pi}u^2}}$.

В случае, если $m; n \leqslant 20$, можно воспользоваться таблицами [20].

Программа V.4.12/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | К НОП | 54 | 20 | F 1/x | 23 | 40 | x→П 1 | 41 |
| 01 | 0 | 00 | 21 | — | 11 | 41 | F $x^2$ | 22 |
| 02 | x→П 6 | 46 | 22 | × | 12 | 42 | 2 | 02 |
| 03 | ←→ | 14 | 23 | ←→ | 14 | 43 | × | 12 |
| 04 | 0 | 00 | 24 | 2 | 02 | 44 | F π | 20 |
| 05 | + | 10 | 25 | × | 12 | 45 | : | 13 |
| 06 | x→П 1 | 41 | 26 | — | 11 | 46 | /—/ | 0L |
| 07 | К П→x 6 | Г6 | 27 | F Bx | 0 | 47 | F $e^x$ | 16 |
| 08 | F . | 25 | 28 | B↑ | 0E | 48 | — | 11 |
| 09 | ←→ | 14 | 29 | П→x 1 | 61 | 49 | F √ | 21 |
| 10 | С/П | 50 | 30 | — | 11 | 50 | — | 11 |
| 11 | БП | 51 | 31 | × | 12 | 51 | П→x 1 | 61 |
| 12 | 05 | 05 | 32 | П→x 1 | 61 | 52 | С/П | 50 |
| 13 | × | 12 | 33 | 1 | 01 | | | |
| 14 | F Bx | 0 | 34 | — | 11 | | Регистры | |
| 15 | П→x 1 | 61 | 35 | 1 | 01 | | | |
| 16 | + | 10 | 36 | F . | 25 | | 1 u | |
| 17 | x→П 1 | 41 | 37 | : | 13 | | 6 k | |
| 18 | П→x 6 | 66 | 38 | F √ | 21 | | | |
| 19 | 2 | 02 | 39 | : | 13 | | | |

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Перейти к началу программы | | В/О | |
| 2. Ввести $k_1$ — количество элементов одного класса | $k_1$ | С/П | |
| 3. Если данные исчерпаны, далее, иначе — к п. 2 | | | |
| 4. Вычислить статистику u и уровень значимости P | | БП 13 С/П | u — в рег. X,1<br>P — в рег. Y |

Время ввода одного значения $k_1$ — 3 с, время вычисления u и P — 15 с.

*Пример*. Вычислить статистику u и уровень значимости P для значений $k_1 = 5, 1, 3, 2, 4, 6$.

Решение. Ввести последовательно значения $k_1 = 5, 1, 3, 2, 4, 6$ согласно инструкции. Выполнить команды БП 13 С/П. В результате получаем $u = -2{,}19$; $P = 0{,}024$.

Задав, например, доверительный уровень 0,1, получаем, что гипотезу о случайном расположении элементов первого и второго классов следует отвергнуть.

## V.4.13. КРИТЕРИЙ КОЛМОГОРОВА

Критерий Колмогорова основан на оценке статистики расхождения выборочной функции распределения $S_n(x)$ и заданной непрерывной гипотетической функции распределения $F(x)$, не содержащей неизвестных параметров.

Эмпирическая функция распределения $S_n(x)$ определяется исходной выборкой и имеет вид

$$S_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < x_1, \\ i/n & \text{при } x_1 \leqslant x < x_{i+1},\ i = 1;\ 2;\ \ldots;\ n-1, \\ 1 & \text{при } x_n \leqslant x, \end{cases}$$

где $x_i$ — упорядоченные в виде вариационного ряда значения выборки: $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$.

Приведены программы вычисления уровней значимости одностороннего и двустороннего критерия Колмогорова.

### V.4.13.1. ОДНОСТОРОННИЙ КРИТЕРИЙ КОЛМОГОРОВА

В одностороннем критерии Колмогорова используется статистика $\Delta_n^+$, определяемая как

$$\Delta_n^+ = \max [F(x) - S_n(x)] \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Уровень значимости критерия $\beta_n(y)$ имеет вид

$$\beta_n^+(y) = \text{Вер}(\Delta_n^+ > y).$$

Значение $\beta_n^+(y)$ вычисляется по формуле [24]

$$\beta_n^+(y) = \sum_{i=0}^{k} C_n^i y\left(y + \frac{i}{n}\right)^{i-1} \cdot \left(1 - y - \frac{i}{n}\right)^{n-i-1}, \quad 0 < y < 1,$$

где $k = E\{n(1-y)\}$ — целая часть от $n(1-y)$.

Вручную вводятся значения n — объем выборки и y — максимальное расхождение $F(x)$ и $S_n(x)$.

Программа V.4.13.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 2 | 42 | 20 | П→x 3 | 63 | 40 | × | 12 |
| 01 | ←→ | 14 | 21 | 1 | 01 | 41 | + | 10 |
| 02 | x→П 1 | 41 | 22 | — | 11 | 42 | F $e^x$ | 16 |
| 03 | П→x 2 | 62 | 23 | П→x 2 | 62 | 43 | + | 10 |
| 04 | × | 12 | 24 | : | 13 | 44 | F L3 | 5— |
| 05 | — | 11 | 25 | П→x 1 | 61 | 45 | 11 | 11 |
| 06 | 2 | 02 | 26 | + | 10 | 46 | П→x 1 | 61 |
| 07 | + | 10 | 27 | x→П 5 | 45 | 47 | × | 12 |
| 08 | x→П 3 | 43 | 28 | F ln | 18 | 48 | С/П | 50 |
| 09 | К П→x 3 | Г3 | 29 | П→x 3 | 63 | | | |
| 10 | 0 | 00 | 30 | 2 | 02 | | Инструкция | |
| 11 | П→x 2 | 62 | 31 | — | 11 | | | |
| 12 | П→x 3 | 63 | 32 | × | 12 | y B↑ n B/O ( | | |
| 13 | 1 | 01 | 33 | 1 | 01 | | | |
| 14 | — | 11 | 34 | П→x 5 | 65 | | Регистр | |
| 15 | — | 11 | 35 | — | 11 | | | |
| 16 | x→П 4 | 44 | 36 | F x≠0 | 57 | 1 | y | |
| 17 | П→x 3 | 63 | 37 | 44 | 44 | 2 | n | |
| 18 | : | 13 | 38 | F ln | 18 | 3—5 | оперативные | |
| 19 | × | 12 | 39 | П→x 4 | 64 | | | |

Время вычисления — $T = 5(3 \cdot E\{n(1-y)\} + 2)$ с.

*Пример.* $n = 7$, $y = 0{,}3$. $\beta_7^+(0{,}3) = 0{,}235$.

Задавшись, например, доверительным уровнем 0,1, получаем, что гипотеза о принадлежности случайной выборки гипотетической генеральной совокупности непротиворечива.

### V.4.13.2. ДВУСТОРОННИЙ КРИТЕРИЙ КОЛМОГОРОВА ПРИ МАЛОМ ОБЪЕМЕ ВЫБОРКИ

В двустороннем критерии Колмогорова используется статистика $\Delta_n$, определяемая как [24]

$$\Delta_n = \max |F(x) - S_n(x)| \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Уровень значимости критерия $\beta_n(y)$ запишем как

$$\beta_n(y) = \text{Вер}(\Delta_n > y).$$

По программе значение $\beta_n(y)$ вычисляется по точной формуле [25] ($n \leqslant 8$)

$$\beta_n(y) = 1 - n!\ I_{n,0},$$

а $I_{n,0}$ определяется из рекуррентного соотношения

$$I_{n,i} = \sum_{k=i+1}^{n} \frac{E_0^{k-i}(b_{i+1} - a_k)}{(k-i)!}(-1)^{k-i-1}\cdot I_{n,k},\ (i = n-1;$$

$$n-2;\ \ldots;\ 1;\ 0),$$

где

$$I_{n,n} = 1,\ a_k = E_0\left(\frac{k}{n} - y\right),\ b_k = E_0\left(\frac{k-1}{n} + y\right),$$

$$E_0(z) = \begin{cases} z \text{ при } z \geqslant 0, \\ 0 \text{ при } z < 0. \end{cases}$$

Вручную вводятся значение n — объем выборки и y — максимальное расхождение $|F(x) - S_n(x)|$.

Программа V.4.13.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 1 | 41 | 27 | F ln | 18 | 54 | — | 11 |
| 01 | x→П 3 | 43 | 28 | П→x 0 | 60 | 55 | П→x 3 | 63 |
| 02 | ←→ | 14 | 29 | x→П 2 | 42 | 56 | : | 13 |
| 03 | x→П Д | 4Г | 30 | × | 12 | 57 | П→x Д | 6Г |
| 04 | 1 | 01 | 31 | F $e^x$ | 16 | 58 | /—/ | 0L |
| 05 | x→П 5 | 45 | 32 | П→x 2 | 62 | 59 | x→П Д | 4Г |
| 06 | П→x 3 | 63 | 33 | /—/ | 0L | 60 | — | 11 |
| 07 | 1 | 01 | 34 | : | 13 | 61 | F x<0 | 5C |
| 08 | + | 10 | 35 | F L2 | 58 | 62 | 65 | 65 |
| 09 | П→x 1 | 61 | 36 | 32 | 32 | 63 | Cx | 0Г |
| 10 | — | 11 | 37 | K П→x 4 | Г4 | 64 | В/О | 52 |
| 11 | x→П 0 | 40 | 38 | × | 12 | 65 | 1 | 01 |
| 12 | 4 | 04 | 39 | — | 11 | 66 | — | 11 |
| 13 | x→П 4 | 44 | 40 | F L0 | 5Г | 67 | F x⩾0 | 59 |
| 14 | 0 | 00 | 41 | 15 | 15 | 68 | 70 | 70 |
| 15 | П→x 1 | 61 | 42 | K x→П 4 | L4 | 69 | Cx | 0Г |
| 16 | ПП | 53 | 43 | F L1 | 5L | 70 | 1 | 01 |
| 17 | 53 | 53 | 44 | 06 | 06 | 71 | + | 10 |
| 18 | П→x 0 | 60 | 45 | П→x 3 | 63 | 72 | В/О | 52 |
| 19 | П→x 1 | 61 | 46 | × | 12 | | | |
| 20 | + | 10 | 47 | F L3 | 5— | | Инструкция | |
| 21 | ПП | 53 | 48 | 45 | 45 | | | |
| 22 | 53 | 53 | 49 | /—/ | 0L | | y В↑ n В/О С/П | |
| 23 | ПП | 53 | 50 | 1 | 01 | | | |
| 24 | 60 | 60 | 51 | + | 10 | | Регистры | |
| 25 | F x≠0 | 57 | 52 | С/П | 50 | | | |
| 26 | 37 | 37 | 53 | 1 | 01 | | 0—Д оперативные | |

Время вычисления — $T \simeq 0{,}25 \cdot n^2$ мин.

*Пример.* $n = 4$, $y = 0{,}4$. $\beta_4\,(0{,}4) = 0{,}4374$.

Задавшись, например, доверительным уровнем 0,1, получаем, что гипотеза о принадлежности случайной выборки гипотетической генеральной совокупности непротиворечива.

### V. 4.14. КРИТЕРИЙ СМИРНОВА

Критерий Смирнова основан на оценке статистики максимального расхождения между парой выборочных эмпирических функций распределения $S_1(x)$ и $S_2(x)$, принадлежащих двум различным классам [24].

Элементы обоих классов располагаются в вариационный ряд и соседние элементы каждого класса объединяются, в результате чего получаем ряд

$$k_1^{(1)},\ k_2^{(1)},\ k_1^{(2)},\ k_2^{(2)},\ \ldots,\ k_1^{(q)},\ k_2^{(q)},$$

где $k_j^{(l)}$ — количество элементов $j$-го класса ($j = 1;2$) в 1-й серии.

При этом максимум D расхождения эмпирических функций распределения $S_1(x)$ и $S_2(x)$ определяется из соотношения

$$D = \max_r \left\{ \left| \frac{\sum\limits_{i=1}^{r} k_1^{(i)}}{N_1} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{r-1} k_2^{(i)}}{N_2} \right|, \left| \frac{\sum\limits_{i=1}^{r} k_2^{(i)}}{N_2} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{r-1} k_1^{(i)}}{N_1} \right| \right\},$$

где $r = 1, 2, \ldots, q$; $N_1$, $N_2$ — количество элементов выборок соответственно первого и второго классов.

Уровень значимости вычисляется приближенно по формуле [24]

$$\beta = e^{-\frac{2D^2}{1/N_1 + 1/N_2}}.$$

По программе вычисляются значения D и $\beta$.

При малых значениях $N_1$, $N_2 < 20$ можно воспользоваться точным выражением $\beta$, приведенным в [20].

Программа V.4.14/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | /—/ | 0L | 09 | П→x 1 | 61 | 18 | П→x 2 | 62 |
| 01 | x→П 2 | 42 | 10 | ПП | 53 | 19 | F 1/x | 23 |
| 02 | ←→ | 14 | 11 | 29 | 29 | 20 | П→x 1 | 61 |
| 03 | x→П 1 | 41 | 12 | П→x 2 | 62 | 21 | F 1/x | 23 |
| 04 | Cx | 0Г | 13 | ПП | 53 | 22 | — | 11 |
| 05 | x→П 3 | 43 | 14 | 29 | 29 | 23 | : | 13 |
| 06 | x→П 4 | 44 | 15 | БП | 51 | 24 | F $e^x$ | 16 |
| 07 | С/П | 50 | 16 | 07 | 07 | 25 | F $x^2$ | 22 |
| 08 | ←→ | 14 | 17 | П→x 3 | 63 | 26 | П→x 3 | 63 |

*Продолжение*

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 27 | F $\sqrt{}$ | 21 | 35 | $\leftrightarrow$ | 14 | 43 | В/О | 52 |
| 28 | С/П | 50 | 36 | — | 11 | | | |
| 29 | : | 13 | 37 | F x<0 | 5С | | | |
| 30 | П→х 4 | 64 | 38 | 42 | 42 | | Регистры | |
| 31 | + | 10 | 39 | F Вх | 0 | | | |
| 32 | х→П 4 | 44 | 40 | х→П 3 | 43 | 1 | $N_1$ | |
| 33 | F $x^2$ | 22 | 41 | F . | 25 | 2 | $-N_2$ | |
| 34 | П→х 3 | 63 | 42 | F . | 25 | 3;4 | оперативные | |

Инструкция V.4.14/54,52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Ввести полные объемы выборок $N_1$ и $N_2$ | $N_1$ | В↑ | |
| | $N_2$ | В/О С/П | |
| 2. Ввести количество элементов в группе первого и второго классов $k_1^{(i)}$, $k_2^{(i)}$ | $k_1^{(i)}$ | В↑ | |
| | $k_2^{(i)}$ | С/П | |
| 3. Если данные исчерпаны, далее, иначе — к п. 2 | | | |
| 4. Вычислить максимальное расхождение D и уровень значимости β | | БП 17 С/П | D — в рег. X<br>β — в рег. Y |

Время ввода одной пары $k_1^{(i)}$, $k_2^{(i)}$ — 9 с, время вычисления D, β — 5 с.

*Пример*. Вычислить D и β для элементов двух классов, сгруппированных в ряд 1, 3, 2, 1, 5, 2.

Решение. Ввести значение полных объемов выборок $N_1 = 8$, $N_2 = 6$. Ввести согласно инструкции $k_1^{(1)} = 1$, $k_2^{(1)} = 3$, $k_1^{(2)} = 2$, $k_2^{(2)} = 1$, $k_1^{(3)} = 5$, $k_2^{(3)} = 2$. Выполнить команды БП 17 С/П.

Ответ: D = 0,375; β = 0,381.

## V.4.15. ПРОВЕРКА НЕЗАВИСИМОСТИ ДВУХ ПРИЗНАКОВ (АНАЛИЗ ТАБЛИЦЫ 2x2)

### V.4.15.1. ПО ДВУМ КАТЕГОРИЯМ

Пусть каждый из n объектов характеризуется двумя признаками. По каждому из признаков может быть две категории: А и В. Четыре возникших класса отображают «таблицей сопряженности признаков

2×2», в каждой клетке которой — количество объектов в соответствующем классе (в последнем столбце и строке указана сумма элементов соответственной строки и столбца)

| | | |
|---|---|---|
| a | b | a+b |
| c | d | c+d |
| a+c | b+d | n |

Проверяется нулевая гипотеза о независимости признаков. Для этого вычисляют уровень значимости Q и сравнивают его с заданной величиной.

Если не существенно, в какую сторону происходит отклонение от нуль-гипотезы, применяют двусторонний критерий. Если отклонение в какую-то одну сторону невозможно, применяют односторонний критерий.

### V.4.15.1.1. При больших количествах ожидаемых объектов в каждом классе

Если количество ожидаемых объектов в каждом классе таково, что

$$\frac{(a+b)\cdot(a+c)}{n},\ \frac{(b+a)\cdot(b+d)}{n},\ \frac{(c+a)\cdot(c+d)}{n}\ \text{и}\ \frac{(d+b)\cdot(d+c)}{n}$$

не менее пяти, величина

$$\chi^2 = \frac{n\left(|ad-bc|-\frac{n}{2}\right)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

распределена по закону «хи-квадрат» с одной степенью свободы [27]. Уровень значимости Q определяют по таблицам (например, [14, 20]), либо по программе V.5.4, либо с помощью приближенной формулы [21].

Величина $\frac{n}{2}$ в числителе выражения для $\chi^2$ представляет собой поправку на непрерывность признака, введенную Йейтсом. Если признак по своей сути дискретен (например, «ДА — НЕТ»), поправку вводить не нужно.

По программе V. 4.15.1.1/21 вычисляется величина $\chi^2$. Если исследуемые признаки дискретны, команду в ячейке памяти с адресом 83 следует заменить командой Р НОП.

Программа V.4.15.1.1/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P 3 | 31 | 42 | + | 96 | 84 | F $x^2$ | 55 |
| 01 | ←→ | 16 | 43 | ↑ | 06 | 85 | × | 26 |
| 02 | P 2 | 21 | 44 | F 8 | 82 | 90 | 2 | 24 |
| 03 | + | 96 | 45 | × | 26 | 91 | × | 26 |
| 04 | P 6 | 61 | 50 | P 8 | 81 | 92 | ↑ | 06 |
| 05 | P 8 | 81 | 51 | F 3 | 32 | 93 | F 8 | 82 |
| 10 | С/П | 78 | 52 | ↑ | 06 | 94 | : | 36 |
| 11 | P 5 | 51 | 53 | F 5 | 52 | 95 | С/П | 78 |
| 12 | ←→ | 16 | 54 | + | 96 | | | |
| 13 | P 4 | 41 | 55 | ↑ | 06 | | Инструкция | |
| 14 | + | 96 | 60 | F 8 | 82 | | | |
| 15 | ↑ | 06 | 61 | × | 26 | | a B↑ b B/O С/П c | |
| 20 | F 8 | 82 | 62 | P 8 | 81 | | B↑ d С/П | |
| 21 | × | 26 | 63 | F 3 | 32 | | | |
| 22 | P 8 | 81 | 64 | ↑ | 06 | | Результат | |
| 25 | F 6 | 62 | 65 | F 4 | 42 | | | |
| 24 | + | 96 | 70 | × | 26 | | $\chi^2$ | |
| 25 | 2 | 24 | 71 | ↑ | 06 | | | |
| 30 | : | 36 | 72 | F 7 | 72 | | Регистры | |
| 31 | P 6 | 61 | 73 | — | 86 | | | |
| 32 | F 2 | 22 | 74 | F $x^2$ | 55 | 2 | a | |
| 33 | ↑ | 06 | 75 | F $\sqrt{}$ | 65 | 3 | в | |
| 34 | F 5 | 52 | 80 | ↑ | 06 | 4 | c | |
| 35 | × | 26 | 81 | F 6 | 62 | 5 | d | |
| 40 | P 7 | 71 | 82 | ←→ | 16 | 6 | n/2 | |
| 41 | F 4 | 42 | 83 | — | 86 | 7;8 | оперативные | |

Время вычисления — 10 с.

По программе V.4.15.1.1/54,52 вычисляются величина $\chi^2$, а также уровень значимости Q ($\chi^2$/1) по приближенной формуле [21]:

$$Q(\chi^2/1) \approx \exp(-(\chi^2)^{0,813}),$$

погрешность которой не превышает 6 % при $0{,}001 < Q < 0{,}1$.

Способ учета поправки на непрерывность признаков указан в инструкции к программе.

Программа V.4.15.1.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 4 | 44 | 06 | x→П 2 | 42 | 12 | - | 12 |
| 01 | ←→ | 14 | 07 | + | 10 | 13 | П→x 2 | 62 |
| 02 | x→П 3 | 43 | 08 | П→x 5 | 65 | 14 | П→x 3 | 63 |
| 03 | + | 10 | 09 | + | 10 | 15 | × | 12 |
| 04 | x→П 5 | 45 | 10 | ←→ | 14 | 16 | — | 11 |
| 05 | F . | 25 | 11 | П→x 4 | 64 | 17 | F $x^2$ | 22 |

*Продолжение*

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 18 | F $\sqrt{}$ | 21 | 36 | x→П 5 | 45 |
| 19 | ←→ | 14 | 37 | : | 13 |
| 20 | 2 | 02 | 38 | ←→ | 14 |
| 21 | : | 13 | 39 | П→x 5 | 65 |
| 22 | П→x 6 | 66 | 40 | — | 11 |
| 23 | × | 12 | 41 | : | 13 |
| 24 | — | 11 | 42 | x→П 5 | 45 |
| 25 | F $x^2$ | 22 | 43 | F ln | 18 |
| 26 | × | 12 | 44 | 6 | 06 |
| 27 | П→x 5 | 65 | 45 | . | 0— |
| 28 | : | 13 | 46 | 5 | 05 |
| 29 | ←→ | 14 | 47 | F lg | 17 |
| 30 | П→x 5 | 65 | 48 | × | 12 |
| 31 | — | 11 | 49 | F $e^x$ | 16 |
| 32 | : | 13 | 50 | /—/ | 0L |
| 33 | П→x 2 | 62 | 51 | F $e^x$ | 16 |
| 34 | П→x 4 | 64 | 52 | С/П | 50 |
| 35 | + | 10 | | | |

Инструкция

В рег. 6 { 1 — если признаки непрерывны; 0 — если признаки дискретны

a В↑ в В↑ с В↑ d

В/О С/П

Результат

Q — в рег. X

$\chi^2$ — в рег. 5

Регистры

2 в

3 с

4 d

5 $\chi^2$

6 1 или 0

Время вычисления — 18 с.

*Пример.* a = 11, b = 89, c = 21, d = 79. Признаки непрерывны.

*Ответ*: $\chi^2 = 3{,}01$; $Q = 0{,}086$.

### V.4.15.1.2. При малых количествах ожидаемых объектов в каждом классе

Если количество ожидаемых объектов хотя бы в одном из четырех классов меньше пяти, критерий $\chi^2$ становится малоэффективным и приходится применять более трудоемкий точный критерий Фишера.

Переставим строки и столбцы исходной таблицы $2 \times 2$, чтобы число a в левом верхнем углу таблицы было минимальным. Будем изменять это число, позаботившись о том, чтобы суммы элементов столбцов и строк были постоянны. Числа b, c и d при этом будут также изменяться.

Вероятность реализации каждой из полученных таблиц равна [27]

$$\frac{(a+b)!\,(c+d)!\,(a+c)!\,(b+d)!}{n!\;a!\;b!\;c!\;d!}.$$

Построим распределение этих вероятностей в зависимости от величины a.

Сумма вероятностей реализации таблиц с a, не превышающим исходного значения (левая ветвь распределения), будучи сопоставлена с заданной величиной $Q$, дает односторонний критерий значимости.

Для получения двустороннего критерия надо сложить вычисленную вероятность левой ветви с суммой вероятностей правой ветви, куда входят все таблицы с такой же или меньшей вероятностью, чем у исходной таблицы.

### V.4.15.1.2.1. Точный односторонний критерий Фишера

Перестановкой строк и столбцов исходной таблицы

| | |
|---|---|
| a | b |
| c | d |

надо добиться одновременного выполнения неравенств

$$\begin{cases} a \leqslant b; \\ a \leqslant c; \\ a \leqslant d. \end{cases}$$

По программе вычисляется уровень значимости

$$Q = \sum_{a=0}^{a_{\text{исх}}} \frac{(a+b)!\,(c+d)!\,(a+c)!\,(b+d)!}{n!\,a!\,b!\,c!\,d!}.$$

Программа составлена на основе разработки В. В. Козлова.

Программа V.4.15.1.2.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 2 | 42 | 15 | x→П Д | 4Г | 30 | ←→ | 14 |
| 01 | 1 | 01 | 16 | П→x 4 | 64 | 31 | К П→x 3 | Г3 |
| 02 | x→П Д | 4Г | 17 | П→x 3 | 63 | 32 | К П→x 4 | Г4 |
| 03 | ←→ | 14 | 18 | ПП | 53 | 33 | К П→x 5 | Г5 |
| 04 | С/П | 50 | 19 | 47 | 47 | 34 | П→x Д | 67 |
| 05 | x→П 4 | 44 | 20 | П→x 5 | 65 | 35 | F Bx | 0 |
| 06 | + | 10 | 21 | П→x 2 | 62 | 36 | П→x 4 | 64 |
| 07 | С/П | 50 | 22 | F x≠0 | 57 | 37 | : | 13 |
| 08 | x→П 5 | 45 | 23 | 45 | 45 | 38 | П→x 5 | 65 |
| 09 | С/П | 50 | 24 | ПП | 53 | 39 | : | 13 |
| 10 | x→П 3 | 43 | 25 | 47 | 47 | 40 | + | 10 |
| 11 | + | 10 | 26 | П→x 2 | 62 | 41 | x→П Д | 4Г |
| 12 | ПП | 53 | 27 | × | 12 | 42 | F Bx | 0 |
| 13 | 47 | 47 | 28 | П→x 3 | 63 | 43 | F L2 | 58 |
| 14 | F 1/x | 23 | 29 | × | 12 | 44 | 26 | 26 |

*Продолжение*

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 45 | П→x Д | 6Г | 59 | 62 | 62 |
| 46 | С/П | 50 | 60 | ←→ | 14 |
| 47 | + | 10 | 61 | x→П 0 | 40 |
| 48 | x→П 1 | 41 | 62 | П→x Д | 6Г |
| 49 | F Bx | 0 | 63 | П→x 1 | 61 |
| 50 | x→П 0 | 40 | 64 | × | 12 |
| 51 | F x=0 | 5E | 65 | П→x 0 | 60 |
| 52 | 54 | 54 | 66 | : | 13 |
| 53 | В/О | 52 | 67 | F L1 | 5L |
| 54 | — | 11 | 68 | 69 | 69 |
| 55 | В↑ | 0E | 69 | F L0 | 5Г |
| 56 | F Bx | 0 | 70 | 63 | 63 |
| 57 | — | 11 | 71 | x→П Д | 4Г |
| 58 | F x<0 | 5C | 72 | В/О | 52 |

Инструкция
a В/О С/П в С/П c С/П d С/П

Регистры

| | |
|---|---|
| 0 | c+d |
| 1 | n |
| 2 | a |
| 3 | d |
| 4 | в |
| 5 | c |
| Д | Q |

*Пример.* a = 2, b = 4, c = 5, d = 3. Q = 0,296.
Время решения примера — 60 с.

### V.4.15.1.2.2. Точный двусторонний критерий Фишера

Перестановкой строк и столбцов исходной таблицы

| | |
|---|---|
| a | b |
| c | d |

надо добиться одновременного выполнения неравенств

$$\begin{cases} ad < (b+1)(c+1); \\ a \leqslant d; \\ b \leqslant c. \end{cases}$$

По программе вычисляются

$$Q_{лев} = \sum_{i=0}^{a} Q_i, \text{ где } Q_0 = \frac{C_{b+d}^{b} C_{a+c}^{a}}{C_n^{a+b}}, \quad Q_{i+1} = Q_i \frac{a_i d_i}{b_{i+1} \cdot c_{i+1}},$$

а также $Q_{лев} + Q_{прав}$,

где

$$Q_{прав} = \sum_{j=0}^{k} Q_j, \; Q(j=0) = \frac{C_{b+d}^{0} \; C_{a+c}^{a+b}}{C_n^{a+b}},$$

k определяется из соотношения Q (j = k) — наибольшая из вероятностей правой ветви, не превышающая $Q_{(i=a)}$.

Программа V.4.15.1.2.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П A | 4— | 37 | F Bx | 0 | 74 | F Bx | 0 |
| 01 | 6 | 06 | 38 | + | 10 | 75 | x→П 0 | 40 |
| 02 | x→П 6 | 46 | 39 | x→П A | 4— | 76 | — | 11 |
| 03 | C/П | 50 | 40 | F Bx | 0 | 77 | B↑ | 0E |
| 04 | x→П 3 | 43 | 41 | П→x 2 | 62 | 78 | F Bx | 0 |
| 05 | ←→ | 14 | 42 | F x≠0 | 57 | 79 | — | 11 |
| 06 | x→П 5 | 45 | 43 | 59 | 59 | 80 | F x<0 | 5C |
| 07 | + | 10 | 44 | × | 12 | 81 | 84 | 84 |
| 08 | F . | 25 | 45 | П→x 3 | 63 | 82 | ←→ | 14 |
| 09 | x→П 4 | 44 | 46 | × | 12 | 83 | x→П 0 | 40 |
| 10 | ←→ | 14 | 47 | ←→ | 14 | 84 | П→x 0 | 60 |
| 11 | x→П 2 | 42 | 48 | К П→x 2 | Г2 | 85 | F x≠0 | 57 |
| 12 | F . | 25 | 49 | К П→x 3 | Г3 | 86 | 97 | 97 |
| 13 | + | 10 | 50 | К П→x 4 | Г4 | 87 | П→x 9 | 69 |
| 14 | 1 | 01 | 51 | К П→x 5 | Г5 | 88 | П→x 1 | 61 |
| 15 | x→П 9 | 49 | 52 | F Bx | 0 | 89 | × | 12 |
| 16 | F . | 25 | 53 | П→x 4 | 64 | 90 | П→x 0 | 60 |
| 17 | ПП | 53 | 54 | : | 13 | 91 | : | 13 |
| 18 | 72 | 72 | 55 | П→x 5 | 65 | 92 | F L1 | 5L |
| 19 | F 1/x | 23 | 56 | : | 13 | 93 | 94 | 94 |
| 20 | x→П 9 | 49 | 57 | БП | 51 | 94 | F L0 | 5Г |
| 21 | П→x 3 | 63 | 58 | 31 | 31 | 95 | 88 | 88 |
| 22 | П→x 4 | 64 | 59 | П→x A | 6— | 96 | x→П 9 | 49 |
| 23 | ПП | 53 | 60 | C/П | 50 | 97 | B/O | 52 |
| 24 | 72 | 72 | 61 | Cx | 0Г | Инструкция | | |
| 25 | П→x 5 | 65 | 62 | П→x 5 | 65 | Cx B/O C/П a B↑ в | | |
| 26 | П→x 2 | 62 | 63 | П→x 4 | 64 | B↑ c B↑ d C/П C/П | | |
| 27 | ПП | 53 | 64 | — | 11 | | | |
| 28 | 72 | 72 | 65 | П→x 4 | 64 | Результат | | |
| 29 | П→x 9 | 69 | 66 | П→x 3 | 63 | | | |
| 30 | К x→П 6 | L6 | 67 | + | 10 | $Q_{лев}$, $Q_{лев}+Q_{прав}$ | | |
| 31 | П→x 7 | 67 | 68 | П→x 4 | 64 | | | |
| 32 | ←→ | 14 | 69 | F . | 25 | Регистры | | |
| 33 | — | 11 | 70 | БП | 51 | 0;1;6; счетчики | | |
| 34 | F x≥0 | 59 | 71 | 04 | 04 | 2—5 a, d, в, c | | |
| 35 | 59 | 59 | 72 | + | 10 | 7;9 оперативные | | |
| 36 | П→x A | 6— | 73 | x→П 1 | 41 | A Q | | |

Время вычисления $Q_{лев}$ — 1 мин 20 с; $Q_{лев}+Q_{прав}$ — 1мин.

*Пример.* a = 2, b = 3, c = 3, d = 1. Переставив строки и столбцы, получим a = 1, b = 3, c = 3, d = 2.

$$Q_{лев}=0{,}3571,\ Q_{лев}+Q_{прав}=0{,}5238.$$

### V.4.15.2. ПО n>2 КАТЕГОРИЯМ

Проверка независимости двух признаков (таблица R × D).

Если каждый из двух признаков, характеризующих данные n объектов, можно описать более чем двумя категориями, необходимо проанализировать таблицу сопряженности R×D

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $q_{11}$ | $q_{12}$ | ... | $q_{1i}$ | ... | $q_{1D}$ | $M_1$ |
| $q_{21}$ | $q_{22}$ | ... | $q_{2i}$ | ... | $q_{2D}$ | $M_2$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $q_{j1}$ | $q_{j2}$ | ... | $q_{ji}$ | ... | $q_{jD}$ | $M_j$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $q_{R1}$ | $q_{R2}$ | ... | $q_{Ri}$ | ... | $q_{RD}$ | $M_R$ |
| $C_1$ | $C_2$ | ... | $C_i$ | ... | $C_D$ | n |

Если количество ожидаемых объектов в каждом классе

$$Q_{ij} = \frac{M_i C_j}{n}$$

не менее пяти, величина

$$\chi^2 = \sum_i \sum_j \frac{(Q_{ij} - q_{ij})^2}{Q_{ij}} = n \left( \sum_i \sum_j \frac{q_{ij}^2}{M_i C_j} - 1 \right)$$

распределена по закону «хи-квадрат» с (R — 1) (D — 1) степенями свободы.

По программам вычисляется величина $\chi^2$. Уровень значимости определяется по таблицам [14, 20] или по программам V.5.4.

Программы составлены на основе разработки В.В. Козлова.

При расчете по программе V.4.15.2/21 число строк $R \leqslant 6$, число столбцов не ограничено.

Программа V.4.15.2/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | /—/ | 56 | 15 | F 6 | 62 | 34 | P x=0 | 59 |
| 01 | P 2 | 21 | 20 | 1 | 14 | 35 | F←→ | 15 |
| 02 | С/П | 78 | 21 | + | 96 | 40 | F 2 | 22 |
| 03 | P 3 | 31 | 22 | P 6 | 61 | 41 | С/П | 78 |
| 04 | —/ | 56 | 23 | P x>0 | 49 | 42 | P 4 | 41 |
| 05 | P 6 | 61 | 24 | P 1 | 11 | 43 | F 3 | 32 |
| 10 | С/П | 78 | 25 | 6 | 64 | 44 | P 5 | 51 |
| 11 | ↑ | 06 | 30 | — | 86 | 45 | С/П | 78 |
| 12 | F 2 | 22 | 31 | ↑ | 06 | 50 | F $x^2$ | 55 |
| 13 | : | 36 | 32 | F 3 | 32 | 51 | ↑ | 06 |
| 14 | P , | 43 | 33 | + | 96 | 52 | F 4 | 42 |

*Продолжение*

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 53 | : | 36 | 71 | P 2 | 21 | 85 | P × | 23 |
| 54 | ↑ | 06 | 72 | F 5 | 52 | | | |
| 55 | F 6 | 62 | 73 | 1 | 14 | | Регистры | |
| 60 | P , | 43 | 74 | — | 86 | | | |
| 61 | P 6 | 61 | 75 | P x=0 | 59 | 2 | —n; $\chi^2$ | |
| 62 | : | 36 | 80 | F , | 45 | 3 | R | |
| 63 | ↑ | 06 | 81 | F 6 | 62 | 4 | $C_1$ | |
| 64 | F 2 | 22 | 82 | P , | 43 | 5 | счетчик | |
| 65 | ←→ | 16 | 83 | 0 | 04 | 6 | оперативный | |
| 70 | — | 86 | 84 | БП | 58 | | $S_1$—$S_6$ $M_1$—$M_6$ | |

При расчете по программе V.4.15.2/54 и V.4.15.2/52 число строк $R \leqslant 10$, число столбцов не ограничено.

Время ввода n — 1 с, R — 1 с, M — 2 — 10 с, C — 1с, q —3— 13 с.

Программа V.4.15.2/54

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | /—/ | 0L | 12 | x→П B | 4L | 24 | F L0 | 5Г |
| 01 | x→П Д | 4Г | 13 | П→x C | 6C | 25 | 15 | 15 |
| 02 | C/П | 50 | 14 | x→П 0 | 40 | 26 | БП | 51 |
| 03 | x→П C | 4C | 15 | П→x Д | 6Г | 27 | 11 | 11 |
| 04 | x→П 0 | 40 | 16 | C/П | 50 | | | |
| 05 | C/П | 50 | 17 | F $x^2$ | 22 | | Регистры | |
| 06 | П→x Д | 6Г | 18 | П→x B | 6L | | | |
| 07 | : | 13 | 19 | : | 13 | | 0 счетчик | |
| 08 | K x→П B ↑ | LE | 20 | K П→x B ↑ | ГЕ | | 1—A $M_j$ | |
| 09 | F L0 | 5Г | 21 | : | 13 | | B $C_1$ | |
| 10 | 05 | 05 | 22 | — | 11 | | C R | |
| 11 | C/П | 50 | 23 | x→П Д | 4Г | | Д —n; $\chi^2$ | |

Программа V.4.15.2/52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | /—/ | 0L | 13 | C/П | 50 | 26 | — | 11 |
| 01 | x→П Д | 4Г | 14 | x→П B | 4L | 27 | x→П Д | 4Г |
| 02 | C/П | 50 | 15 | П→x C | 6C | 28 | F L0 | 5Г |
| 03 | x→П C | 4C | 16 | x→П 0 | 40 | 29 | 17 | 17 |
| 04 | x→П 0 | 40 | 17 | П→x 0 | 60 | 30 | БП | 51 |
| 05 | П→x 0 | 60 | 18 | x→П E | 4E | 31 | 13 | 13 |
| 06 | x→П E | 4E | 19 | П→x Д | 6Г | | Регистры | |
| 07 | C/П | 50 | 20 | C/П | 50 | | | |
| 08 | П→x Д | 6Г | 21 | F $x^2$ | 22 | | 0; E счетчики | |
| 09 | : | 13 | 22 | П→x B | 6L | | 1—A $M_j$ | |
| 10 | K x→П E | LE | 23 | : | 13 | | B $C_1$ | |
| 11 | F L0 | 5Г | 24 | K П→x E | ГЕ | | C R | |
| 12 | 05 | 05 | 25 | : | 13 | | Д —n; $\chi^2$ | |

Время ввода n — 1 с, R — 1 с, M — 2 с, C — 2 с, q — 4 с.
Для всех трех программ используется единая инструкция:

Инструкция V.4.15.2/21,54,52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Занести число объектов | n | В/О С/П | |
| 2. Занести число строк | R | С/П | |
| 3. Занести сумму объектов в очередной строке | $M_j$ | С/П | |
| 4. Если введены суммы по всем строкам, далее, нет — к п. 3 | | | |
| 5. Занести сумму объектов в очередном столбце | $C_i$ | С/П | |
| 6. Занести количество объектов в очередной строке i-го столбца | $q_{ij}$ | С/П | |
| 7. Если введена не вся информация i-го столбца, то — к п. 6, иначе далее | | | |
| 8. Если введена информация не по всем столбцам, — к п. 5, иначе прочитать ответ на индикаторе | | | $\chi^2$ |

*Пример.* Определить значение $\chi^2$ для таблицы сопряженности $3\times2$ (число степеней свободы (3—1) (2 — 1) = 2)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 65 | 26 | 8 | 99 |
| 32 | 41 | 24 | 97 |
| 97 | 67 | 32 | 196 |

Ответ: $\chi^2 = 22{,}57$.

### V.4.16. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДОВЕРИТЕЛЬНОГО ИНТЕРВАЛА ДЛЯ НЕИЗВЕСТНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ ПО ЧАСТОТЕ

Пусть некоторое событие при n испытаниях произошло m раз. Тогда границы доверительного интервала $p_1$ и $p_2$, накрывающего неизвестную вероятность p с вероятностью P = 1 — Q (Q — уровень значимости), определятся как решение квадратного уравнения [23]

$$p^2\left(1+\frac{\psi^2}{n}\right)-p\left(2\frac{m}{n}+\frac{\psi^2}{n}\right)+\left(\frac{m}{n}\right)^2=0,$$

где $\psi(1-Q)$ — обратный интеграл вероятности.

Использовано приближенное выражение $\psi \approx [-\ln Q]^{0{,}61}$.

При $0{,}001 < Q < 0{,}2$ погрешность вычисления $p_{1,2}$ не превышает 4 %.

Программа V.4.16/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P ln | 13 | 34 | : | 36 | 72 | /—/ | 56 |
| 01 | /—/ | 56 | 35 | ↑ | 06 | 73 | P 5 | 51 |
| 02 | 1 | 14 | 40 | F 4 | 42 | 74 | F 6 | 62 |
| 03 | , | 46 | 41 | + | 96 | 75 | + | 96 |
| 04 | 2 | 24 | 42 | ↑ | 06 | 80 | ↑ | 06 |
| 05 | 2 | 24 | 43 | F 5 | 52 | 81 | F 5 | 52 |
| 10 | ←→ | 16 | 44 | : | 36 | 82 | С/П | 78 |
| 11 | $x^y$ | 38 | 45 | P 6 | 61 | | | |
| 12 | P 6 | 61 | 50 | F 4 | 42 | | Инструкция | |
| 13 | С/П | 78 | 51 | F $x^2$ | 55 | | | |
| 14 | P 5 | 51 | 52 | ↑ | 06 | Q В/О С/П m ↑n С/П | | |
| 15 | : | 36 | 53 | F 5 | 52 | | | |
| 20 | P 4 | 41 | 54 | : | 36 | | Результат | |
| 21 | F 6 | 62 | 55 | ↑ | 06 | | | |
| 22 | ↑ | 06 | 60 | F 6 | 62 | $p_1$ — в рег. X, 5 | | |
| 23 | F 5 | 52 | 61 | F $x^2$ | 55 | $p_2$ — в рег. Y | | |
| 24 | : | 36 | 62 | ←→ | 16 | | | |
| 25 | 1 | 14 | 63 | — | 86 | | Регистры | |
| 30 | + | 96 | 64 | F $\sqrt{}$ | 65 | | | |
| 31 | P 5 | 51 | 65 | ↑ | 06 | 4 | m/n | |
| 32 | ←→ | 16 | 70 | F 6 | 62 | 5 | $p_1$ | |
| 33 | 2 | 24 | 71 | — | 86 | 6 | $(m+\psi^2/2)/(n+\psi^2)$ | |

Программа V.4.16/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 2 | 42 | 18 | + | 10 | 36 | — | 11 |
| 01 | : | 13 | 19 | П→x 2 | 62 | 37 | С/П | 50 |
| 02 | x→П 3 | 43 | 20 | 1 | 01 | | | |
| 03 | ←→ | 14 | 21 | + | 10 | | Инструкция | |
| 04 | F ln | 18 | 22 | x→П 4 | 44 | | | |
| 05 | —/ | 0L | 23 | : | 13 | Q В↑ m В↑ n В/О С/П | | |
| 06 | F ln | 18 | 24 | x→П 2 | 42 | | | |
| 07 | 1 | 01 | 25 | В↑ | 0E | | Результат | |
| 08 | . | 0— | 26 | F $x^2$ | 22 | | | |
| 09 | 2 | 02 | 27 | П→x 3 | 63 | | $p_1$ — в рег. X | |
| 10 | 2 | 02 | 28 | F $x^2$ | 22 | | $p_2$ — в рег. Y | |
| 11 | × | 12 | 29 | П→x 4 | 64 | | | |
| 12 | F $e^x$ | 16 | 30 | : | 13 | | Регистры | |
| 13 | П→x 2 | 62 | 31 | — | 11 | | | |
| 14 | : | 13 | 32 | F ln | 21 | 2 | оперативный | |
| 15 | x→П 2 | 42 | 33 | + | 10 | 3 | m/n | |
| 16 | 2 | 02 | 34 | П→x 2 | 62 | 4 | $1+\psi^2/n$ | |
| 17 | : | 13 | 35 | F Bx | 0 | | | |

Время вычисления — 10 с.

*Пример.* Q = 0,05, m = 4, n = 100.

Ответ: $p_1$ = 0,0157, $p_2$ = 0,0981.

## V.5. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

### V.5.1. БИНОМИАЛЬНЫЙ ЗАКОН

Биномиальный закон распределения вероятностей описывает вероятность появления события точно m раз в последовательности из n независимых испытаний, когда вероятность события в одном испытании p [13]

$$P(n, m, p) = C_n^m \cdot p^m (1-p)^{n-m}.$$

При этом вероятность Q появления событий не более m раз при n испытаниях равна

$$Q(n, m, p) = \sum_{i=0}^{m} P(n, i, p) = \sum_{i=0}^{m} C_n^i p^i (1-p)^{n-i}.$$

Приводятся две программы одновременного вычисления P и Q.

#### V.5.1.1. ПРИ ФИКСИРОВАННОМ m

Программа V.5.1.1/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P 2 | 21 | 34 | F 3 | 32 | 72 | P 3 | 31 |
| 01 | С/П | 78 | 35 | ←→ | 16 | 73 | F 6 | 62 |
| 02 | P 3 | 31 | 40 | — | 86 | 74 | ↑ | 06 |
| 03 | Cx | 76 | 41 | ↑ | 06 | 75 | F 5 | 52 |
| 04 | P7 | 71 | 42 | F 7 | 72 | 80 | С/П | 78 |
| 05 | $Pe^x$ | 33 | 43 | : | 36 | | | |
| 10 | — | 86 | 44 | ↑ | 06 | | Инструкция | |
| 11 | /— | 56 | 45 | F 4 | 42 | В/О m С/П p ↑ n | | |
| 12 | P 5 | 51 | 50 | × | 26 | | С/П | |
| 13 | : | 36 | 51 | ↑ | 06 | | | |
| 14 | P 4 | 41 | 52 | F 6 | 62 | | Результат | |
| 15 | F 3 | 32 | 53 | × | 26 | | | |
| 20 | ↑ | 06 | 54 | P 6 | 61 | Q—в рег. X, 5 | | |
| 21 | F 5 | 52 | 55 | ↑ | 06 | P—в рег. Y, 6 | | |
| 22 | $x^y$ | 38 | 60 | F 5 | 52 | | | |
| 23 | P 6 | 61 | 61 | + | 96 | | Регистры | |
| 24 | БП | 58 | 62 | P 5 | 51 | 2 | m | |
| 25 | P ВП | 63 | 63 | F 2 | 22 | 3 | n | |
| 30 | F 7 | 72 | 64 | ↑ | 06 | 4 | p/(1—p) | |
| 31 | 1 | 14 | 65 | F 7 | 72 | 5 | Q | |
| 32 | + | 96 | 70 | — | 86 | 6 | P | |
| 33 | P 7 | 71 | 71 | P x=0 | 59 | 7 | счетчик | |

Программа V.5.1.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | К НОП | 54 | 18 | В↑ | 0E | 36 | 21 | 21 |
| 01 | 1 | 01 | 19 | БП | 51 | 37 | С/П | 50 |
| 02 | + | 10 | 20 | 35 | 35 | | | |
| 03 | x→П 1 | 41 | 21 | П→x 2 | 62 | | Инструкция | |
| 04 | x→П 2 | 42 | 22 | П→x 1 | 61 | | | |
| 05 | F . | 25 | 23 | — | 11 | | n x→П 0 | |
| 06 | В↑ | 0E | 24 | : | 13 | p | В↑ m В/О С/П | |
| 07 | К НОП | 54 | 25 | П→x 0 | 60 | | | |
| 08 | 1 | 01 | 26 | F Bx | 0 | | Результат | |
| 09 | ←→ | 14 | 27 | — | 11 | | | |
| 10 | — | 11 | 28 | 1 | 01 | | P—в рег. X | |
| 11 | : | 13 | 29 | + | 10 | | Q—в рег. Y | |
| 12 | x→П 3 | 43 | 30 | × | 12 | | | |
| 13 | F Bx | 0 | 31 | П→x 3 | 63 | | Регистры | |
| 14 | F ln | 18 | 32 | × | 12 | | 0 n | |
| 15 | П→x 0 | 60 | 33 | + | 10 | | 1 счетчик | |
| 16 | × | 12 | 34 | F Bx | 0 | | 2 m+1 | |
| 17 | F $e^x$ | 16 | 35 | F L1 | 5L | | 3 p/(1—p) | |

Время вычисления — $T = 5\,(m + 2)$ с.
*Пример.* $n = 8$, $m = 3$, $p = 0{,}7$.
Ответ: $P = 0{,}0467$, $Q = 0{,}058$.

### V.5.1.2. ЗНАЧЕНИЯ $P_m$ И $Q_m$ ВЫВОДЯТСЯ ПОШАГОВО

При вычислении по программе V.5.1.2/21 значение $Q_m$ помещается в регистры X и 5, $P_m$ — в регистры Y и 6, а m — в регистр 7. Значения $P_m$ и m могут быть выведены в регистр X на каждом шаге вычисления.

Программа V.5.1.2/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P 3 | 31 | 22 | P 6 | 61 |
| 01 | Cx | 76 | 23 | P 5 | 51 |
| 02 | P 7 | 71 | 24 | С/П | 78 |
| 03 | P $e^x$ | 33 | 25 | F 7 | 72 |
| 04 | — | 86 | 30 | 1 | 14 |
| 05 | /—/ | 56 | 31 | + | 96 |
| 10 | P 5 | 51 | 32 | P 7 | 71 |
| 11 | : | 36 | 33 | F 3 | 32 |
| 12 | P 4 | 41 | 34 | ←→ | 16 |
| 13 | F 3 | 32 | 35 | — | 86 |
| 14 | ↑ | 06 | 40 | ↑ | 06 |
| 15 | F 5 | 52 | 41 | F 7 | 72 |
| 20 | $x^y$ | 38 | 42 | : | 36 |
| 21 | ↑ | 06 | 43 | ↑ | 06 |

Инструкция

В/О p ↑ n С/П С/П С/П...

Результат

Q—в рег. X, 5
P—в рег. Y, 6
m—в рег. 7

*Продолжение*

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 44 | F 4 | 42 | 54 | ↑ | 06 |
| 45 | × | 26 | 55 | F 5 | 52 |
| 50 | ↑ | 06 | 60 | + | 96 |
| 51 | F 6 | 62 | 61 | БП | 58 |
| 52 | × | 26 | 62 | 2 | 24 |
| 53 | P 6 | 61 | | | |

Регистры

| | |
|---|---|
| 3 | n |
| 4 | p/(1—p) |
| 5 | Q |
| 6 | P |
| 7 | m |

При вычислении по программе V.1.2/54,52 значения $P_m$ и $Q_m$ помещаются в регистры X и Y, а m — в регистр 2. Для вывода в регистр X значения $Q_m$ следует выполнить команду ↔, а затем перед последующим нажатием С/П следует восстановить исходное положение командой ↔.

Для вывода в регистр X значения m следует выполнить команду П → x 2, а перед последующим нажатием С/П выполнить команду F. .

Программа V.5.1.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 0 | 40 | 17 | П→x 0 | 60 |
| 01 | ←→ | 14 | 18 | — | 11 |
| 02 | 0 | 00 | 19 | 1 | 01 |
| 03 | x→П 2 | 42 | 20 | — | 11 |
| 04 | ВП | 0C | 21 | × | 12 |
| 05 | ←→ | 14 | 22 | П→x 2 | 62 |
| 06 | — | 11 | 23 | : | 13 |
| 07 | x→П 1 | 41 | 24 | 1 | 01 |
| 08 | F ln | 18 | 25 | П→x 1 | 61 |
| 09 | × | 12 | 26 | F 1/x | 23 |
| 10 | F $e^x$ | 16 | 27 | — | 11 |
| 11 | В↑ | 0E | 28 | × | 12 |
| 12 | С/П | 50 | 29 | + | 10 |
| 13 | П→x 2 | 62 | 30 | F Вх | 0 |
| 14 | 1 | 01 | 31 | БП | 51 |
| 15 | + | 10 | 32 | 12 | 12 |
| 16 | x→П 2 | 42 | | | |

Инструкция

p В↑ n В/О С/П
С/П ...

Результат

P—в рег. X
Q—в рег. Y
m—в рег. 2

Регистры

| | |
|---|---|
| 0 | n |
| 1 | 1—p |
| 2 | m |

Время вычисления одной пары $P_m$ и $Q_m$ — 6 с.

*Пример.* p = 0,5, n = 12.

Ответ: $Q_0 = 2{,}44 \cdot 10^{-4}$, $P_0 = 2{,}44 \cdot 10^{-4}$, $Q_1 = 3{,}17 \cdot 10^{-3}$, $P_1 = 2{,}93 \cdot 10^{-3}$, ...

### V.5.2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА

Случайная величина x имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$, если вероятность того, что $x = m$, имеет вид

$$P(m, \lambda) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

При этом вероятность Q того, что x окажется не больше m, равна

$$Q(m, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} P(i, \lambda) = \sum_{i=0}^{m} \frac{\lambda^i}{i!} e \quad .$$

#### V.5.2.1. ПРИ ФИКСИРОВАННОМ m

Вычисления производятся при фиксированных значениях m и $\lambda$, вводимых вручную.

Программа V.5.2.1/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P 4 | 41 | 25 | F 6 | 62 |
| 01 | /—/ | 56 | 30 | ←→ | 16 |
| 02 | P $e^x$ | 33 | 31 | : | 36 |
| 03 | P 6 | 61 | 32 | ↑ | 06 |
| 04 | P 7 | 71 | 33 | F 4 | 42 |
| 05 | ←→ | 16 | 34 | × | 26 |
| 10 | P 5 | 51 | 35 | P 6 | 61 |
| 11 | БП | 58 | 40 | ↑ | 06 |
| 12 | P 5 | 51 | 41 | F 7 | 72 |
| 13 | 1 | 14 | 42 | + | 96 |
| 14 | — | 86 | 43 | P 7 | 71 |
| 15 | P 8 | 81 | 44 | ↑ | 06 |
| 20 | ↑ | 06 | 45 | F 8 | 82 |
| 21 | F 5 | 52 | 50 | P x=0 | 59 |
| 22 | ←→ | 16 | 51 | 1 | 14 |
| 23 | — | 86 | 52 | F 6 | 62 |
| 24 | ↑ | 06 | 53 | С/П | 78 |

Инструкция

m ↑ λ В/О С/П

Результат

P—в рег. X, 6
Q—в рег. Y, 7

Регистры

4 λ
5 m
6 P
7 Q
8 счетчик

Программа V.5.2.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | К НОП | 54 | 04 | x→П 1 | 41 | 08 | F $e^x$ | 16 |
| 01 | 1 | 01 | 05 | ←→ | 14 | 09 | В↑ | 0E |
| 02 | + | 10 | 06 | x→П 2 | 42 | 10 | БП | 51 |
| 03 | x→П 0 | 40 | 07 | /—/ | 0L | 11 | 20 | 20 |

*Продолжение*

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 12 | П→x 2 | 62 | 18 | + | 10 |
| 13 | × | 12 | 19 | F Bx | 0 |
| 14 | П→x 1 | 61 | 20 | F L0 | 5Г |
| 15 | П→x 0 | 60 | 21 | 12 | 12 |
| 16 | — | 11 | 22 | С/П | 50 |
| 17 | : | 13 | | | |

Инструкция

λ B↑ m B/O С/П

Результат
P—в рег. X
Q—в рег. Y

Регистры
0; 1 оперативные
2 λ

Время вычисления — $T = (3\,m + 5)$ с.

*Пример.* $m = 2$, $\lambda = 0{,}5$.

Ответ: $P(2; 0{,}5) = 0{,}0758$, $Q(2; 0{,}5) = 0{,}9856$.

### V.5.2.2. ПОШАГОВЫЙ ВЫВОД

Вычисление и вывод $P_m$ и $Q_m$ производятся пошагово. После каждого нажатия С/П значение m увеличивается на единицу, а вычисленные значения $Q(m, \lambda)$ и $P(m, \lambda)$ помещаются соответственно в регистры X и Y.

При вычислении по программе V.5.2.2/21 значение $Q_m$ помещается в регистры X и 4, $P_m$ — в регистры Y и 5, а m — в регистр 3.

Значения $P_m$ и m могут быть выведены в регистр X на каждом шаге вычисления.

Программа V.5.2.2/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P 2 | 21 | 22 | ↑ | 06 |
| 01 | /— | 56 | 23 | F 2 | 22 |
| 02 | P $e^x$ | 33 | 24 | × | 26 |
| 03 | 0 | 04 | 25 | P 5 | 51 |
| 04 | P 3 | 31 | 30 | F 3 | 32 |
| 05 | P 4 | 41 | 31 | 1 | 14 |
| 10 | + | 96 | 32 | + | 96 |
| 11 | P 5 | 51 | 33 | P3 | 31 |
| 12 | ↑ | 06 | 34 | ↑ | 06 |
| 13 | F 4 | 42 | 35 | F 5 | 52 |
| 14 | + | 96 | 40 | ←→ | 16 |
| 15 | P 4 | 41 | 41 | : | 36 |
| 20 | С/П | 78 | 42 | БП | 58 |
| 21 | F 5 | 52 | 43 | F 1 | 12 |

Инструкция

B/O λ С/П С/П С/П...

Результат

Q—в рег. X, 4
P—в рег. Y, 5
m—в рег. 3

Регистры
2 λ
3 m
4 Q
5 P

При вычислении по программе V.5.2.2/54,52 для ввода в регистр X вычисленного значения $P(m, \lambda)$ следует выполнить команду ↔,

а затем перед новым нажатием С/П восстановить содержимое регистров X и Y такой же командой ↔ . Значение m помещается в регистр 0 и для его вывода в регистр *X* следует выполнить команду П → x 0, а для восстановления содержимого регистров X и Y перед новым нажатием С/П следует выполнить команду F. .

Программа V.5.2.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | В↑ | 0E | 11 | x→П 1 | 41 |
| 01 | — | 0L | 12 | С/П | 50 |
| 02 | F $e^x$ | 16 | 13 | F . | 25 |
| 03 | 0 | 00 | 14 | × | 12 |
| 04 | x→П 0 | 40 | 15 | П→x 0 | 60 |
| 05 | x→П 1 | 41 | 16 | 1 | 01 |
| 06 | ВП | 0C | 17 | + | 10 |
| 07 | : | 13 | 18 | x→П 0 | 40 |
| 08 | В↑ | 0E | 19 | БП | 51 |
| 09 | П→x 1 | 61 | 20 | 07 | 07 |
| 10 | + | 10 | | | |

Инструкция

В/О λ С/П С/П С/П...

Результат

Q—в рег. X, 1
P—в рег. Y
m—в рег. 0

Регистры

0 m
1 оперативный

Время вычисления очередной пары Q и P — 5 с.

*Пример.* λ = 0,3. $Q_0 = 0{,}741$, $P_0 = 0{,}741$; $Q_1 = 0{,}963$, $P_1 = 0{,}222$; ...

## V.5.3. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

### V.5.3.1. ИНТЕГРАЛ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Интеграл вероятностей Φ (x) определяется как [13]

$$\Phi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Приведены программы вычисления приближенных значений с разной точностью и временем расчета.

#### V.5.3.1.1. Вычисление $\widetilde{\Phi}(x)$ по формуле [11]

$$\widetilde{\Phi}(x) = 1 - (1 + 10^{-6}\, x\,(C_6 + x\,(C_5 + x\,(C_4 + x\,(C_3 + x\,(C_2 + xC_1))))))^{-16}.$$

Требуемые значения $C_1 — C_6$ помещаются в регистры 1—6 и приведены в таблице распределения регистров в конце программы и в инструкции. Абсолютная погрешность вычислений $\Delta$ не превышает $5 \cdot 10^{-7}$.

Программа V.5.3.1.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | В↑ | 0E | 14 | F $10^x$ | 15 |
| 01 | К НОП | 54 | 15 | : | 13 |
| 02 | 6 | 06 | 16 | 1 | 01 |
| 03 | x→П 0 | 40 | 17 | + | 10 |
| 04 | Cx | 0Г | 18 | F $x^2$ | 22 |
| 05 | П→x0 | 60 | 19 | F $x^2$ | 22 |
| 06 | x→П Д | 4Г | 20 | F $x^2$ | 22 |
| 07 | F . | 25 | 21 | F $x^2$ | 22 |
| 08 | К П→x Д | ГГ | 22 | F 1/x | 23 |
| 09 | − | 10 | 23 | 1 | 01 |
| 10 | × | 12 | 24 | — | 11 |
| 11 | F L0 | 5Г | 25 | /—/ | 0L |
| 12 | 05 | 05 | 26 | С/П | 50 |
| 13 | 6 | 06 | | | |

Регистры

| | |
|---|---|
| 0; | Д оперативные |
| 1 | $C_1$=49867,347 |
| 2 | $C_2$=21141,006 |
| 3 | $C_3$=3277,626 |
| 4 | $C_4$=38,004 |
| 5 | $C_5$=48,891 |
| 6 | $C_6$ 5,383 |

Инструкция V.5.3.1.1/54,52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Занести константы $C_1 — C_6$ | 49867,347 | x→П 1 | |
| | 21141,006 | x→П 2 | |
| | 3277,626 | x→П 3 | |
| | 38,004 | x→П 4 | |
| | 48,891 | x→П 5 | |
| | 5,383 | x→П 6 | |
| 2. Вычислить $\Phi(x)$ | x | В/О С/П | $\tilde{\Phi}(x)$ |
| 3. Для нового счета — к п. 2 | | | |

Время вычисления после ввода x — 20 с.

*Пример.* x 1. $\tilde{\Phi}(1) = 0{,}6826895$; $\Phi(1) = 0{,}682690$.

## V.5.3.1.2. Представление $\tilde{\Phi}(x)$ в виде суммы ряда по степеням x [11] при $x \leqslant 4$

$$\tilde{\Phi}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, x \sum_{i=0}^{N} \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^i}{i!\,(2i+1)}.$$

## V.5.3.1.2.1. При N=9

Программа V.5.3.1.2.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | F $x^2$ | 22 | 10 | П→x 0 | 60 | 20 | Fп | 20 |
| 01 | 2 | 02 | 11 | 2 | 02 | 21 | : | 13 |
| 02 | : | 13 | 12 | F 1/x | 23 | 22 | F $\sqrt{\ }$ | 21 |
| 03 | 9 | 09 | 13 | — | 11 | 23 | С/П | 50 |
| 04 | x→П 0 | 40 | 14 | F 1/x | 23 | | | |
| 05 | 0 | 00 | 15 | + | 10 | | Инструкция | |
| 06 | П→x 0 | 60 | 16 | F L0 | 5Г | | x В/О С/П | |
| 07 | : | 13 | 17 | 06 | 06 | | | |
| 08 | × | 12 | 18 | F $x^2$ | 22 | | Регистр | |
| 09 | /—/ | 0L | 19 | × | 12 | | 0 оперативный | |

Относительная погрешность вычисления $\delta^*$

$$\delta^* = \frac{|\widetilde{\Phi}(x) - \Phi(x)|}{\mathrm{Min}[\Phi(x);\ 1-\Phi(x)]}$$

при $x \leqslant 2$ $(0 < \Phi(x) \leqslant 0{,}955)$ не превышает 0,3 %.

Время вычисления — 30 с.

*Пример.* $x = 2$. $\widetilde{\Phi}(2) = 0{,}9546$; $\Phi(2) = 0{,}95450$.

## V.5.3.1.2.2. С остановом по машинному нулю

Программа V.5.3.1.2.2/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | F $x^2$ | 55 | 30 | — | 86 | 60 | + | 96 |
| 01 | P 2 | 21 | 31 | F 1/x | 45 | 61 | P 4 | 41 |
| 02 | 2 | 24 | 32 | + | 96 | 62 | — | 86 |
| 03 | × | 26 | 33 | + | 96 | 63 | P x=0 | 59 |
| 04 | ↑ | 06 | 34 | 2 | 24 | 64 | P 2 | 21 |
| 05 | P п | 23 | 35 | + | 96 | 65 | + | 96 |
| 10 | : | 36 | 40 | ↑ | 06 | 70 | С/П | 78 |
| 11 | F $\sqrt{\ }$ | 65 | 41 | F 2 | 22 | | | |
| 12 | P 3 | 31 | 42 | ←→ | 16 | | Инструкция | |
| 13 | P 4 | 41 | 43 | : | 36 | | | |
| 14 | 0 | 04 | 44 | /—/ | 56 | | x В/О С/П | |
| 15 | P 5 | 51 | 45 | ↑ | 06 | | | |
| 20 | F 5 | 52 | 50 | F 3 | 32 | | Регистры | |
| 21 | 1 | 14 | 51 | × | 26 | | | |
| 22 | + | 96 | 52 | P 3 | 31 | | 2 $x^2$ | |
| 23 | P 5 | 51 | 53 | ↑ | 06 | | 3 оперативный | |
| 24 | 2 | 24 | 54 | F 4 | 42 | | 4 $\widetilde{\Phi}(x)$ | |
| 25 | F 1/x | 45 | 55 | ←→ | 16 | | 5 счетчик | |

Программа V.5.3.1.2.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | F $x^2$ | 22 | 14 | П→x 3 | 63 | 28 | — | 11 |
| 01 | 2 | 02 | 15 | 1 | 01 | 29 | F x=0 | 5E |
| 02 | : | 13 | 16 | — | 11 | 30 | 12 | 12 |
| 03 | x→П 1 | 41 | 17 | x→П 3 | 43 | 31 | F Bx | 0 |
| 04 | F π | 20 | 18 | : | 13 | 32 | С/П | 50 |
| 05 | : | 13 | 19 | П→x 2 | 62 | | | |
| 06 | F $\sqrt{}^-$ | 21 | 20 | × | 12 | | Инструкция | |
| 07 | 0 | 00 | 21 | x→П 2 | 42 | | | |
| 08 | x→П 3 | 43 | 22 | 2 | 02 | | x В/О С/П | |
| 09 | ←→ | 14 | 23 | F 1/x | 23 | | | |
| 10 | БП | 51 | 24 | П→x 3 | 63 | | Регистры | |
| 11 | 21 | 21 | 25 | — | 11 | | | |
| 12 | F Bx | 0 | 26 | : | 13 | | 1 $x^2/2$ | |
| 13 | П→x 1 | 61 | 27 | + | 10 | | 2;3 оперативные | |

Относительная погрешность вычисления $\delta$ не превышает $2 \cdot 10^{-6}$ при $x \leqslant 4$.

Время вычисления — $T = 20\,(2x + 1)$ с.

*Пример.* $x = 3$. $\widetilde{\Phi}(3) = 0{,}9973001$; $\Phi(3) = 0{,}9973002$.

### V.5.3.1.3. Представление Φ(x) в виде суммы ряда по $x^{-1}$ [11] при $x \geqslant 4$

$$\widetilde{\Phi}(x) = 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{e}{x}^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{i=0}^{N} \frac{(2i-1)!!}{(-x^2)^i}.$$

Для более точной оценки $\widetilde{\Phi}(x)$ полученное в процессе расчета значение $1 - \widetilde{\Phi}(x)$ заносится в регистр памяти 2 и может быть прочитано командой П → x 2.

Программа V.5.3.1.3/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | F $x^2$ | 55 | 12 | — | 86 | 24 | 1 | 14 |
| 01 | P 2 | 21 | 13 | /—/ | 56 | 25 | + | 96 |
| 02 | 6 | 64 | 14 | ↑ | 06 | 30 | P 4 | 41 |
| 03 | P 4 | 41 | 15 | F 4 | 42 | 31 | F 3 | 32 |
| 04 | P 3 | 31 | 20 | × | 26 | 32 | 1 | 14 |
| 05 | ↑ | 06 | 21 | ↑ | 06 | 33 | — | 86 |
| 10 | + | 96 | 22 | F 2 | 22 | 34 | P x=0 | 59 |
| 11 | 1 | 14 | 23 | : | 36 | 35 | F ↑ | 05 |

*Продолжение*

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 40 | F 2 | 22 | 53 | F $\sqrt{-}$ | 65 | 70 | С/П | 78 |
| 41 | ↑ | 06 | 54 | ↑ | 06 | | | |
| 42 | P $e^x$ | 33 | 55 | F 4 | 42 | | Инструкция | |
| 43 | × | 26 | 60 | ←→ | 16 | | x В/О С/П | |
| 44 | 2 | 24 | 61 | : | 36 | | Регистры | |
| 45 | : | 36 | 62 | 1 | 14 | | | |
| 50 | ↑ | 06 | 63 | ←→ | 16 | | 2 $1-\widetilde{\Phi}(x)$ | |
| 51 | P π | 23 | 64 | P 2 | 21 | | 3;4 оперативные | |
| 52 | × | 26 | 65 | — | 86 | | | |

Программа V.5.3.1.3/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | F $x^2$ | 22 | 13 | F L2 | 58 | 26 | ←→ | 14 |
| 01 | 6 | 06 | 14 | 03 | 03 | 27 | x→П 2 | 42 |
| 02 | x→П 2 | 42 | 15 | ←→ | 14 | 28 | — | 11 |
| 03 | 1 | 01 | 16 | B ↑ | 0E | 29 | С/П | 50 |
| 04 | П→x 2 | 62 | 17 | F $e^x$ | 16 | | | |
| 05 | — | 11 | 18 | × | 12 | | Инструкция | |
| 06 | П→x 2 | 62 | 19 | 2 | 02 | | | |
| 07 | — | 11 | 20 | : | 13 | | x В/О С/П | |
| 08 | × | 12 | 21 | F π | 20 | | | |
| 09 | ←→ | 14 | 22 | × | 12 | | Регистр | |
| 10 | : | 13 | 23 | F $\sqrt{-}$ | 21 | | | |
| 11 | 1 | 01 | 24 | : | 13 | | 2 счетчик; $1-\widetilde{\Phi}(x)$ | |
| 12 | + | 10 | 25 | 1 | 01 | | | |

Относительная погрешность вычисления $\delta^*$ при $x \geqslant 4$ ($0{,}9999 \leqslant \leqslant \Phi(x) < 1$) не превышает 0,5 %. Время вычисления — 25 с.

*Пример.* $x = 5$. $\widetilde{\Phi}(5) = 0{,}9999994$; $\Phi(5) = 0{,}9999994266$; $1 - \widetilde{\Phi}(5) = 5{,}7344 \cdot 10^{-7}$, $1 - \Phi(5) = 5{,}7340 \cdot 10^{-7}$.

### V.5.3.1.4. Вычисление $\widetilde{\Phi}(x)$ по формуле [11]

$$\widetilde{\Phi}(x) = \sqrt{1 - e^{\frac{-2}{\pi} \cdot x^2}}.$$

Относительная погрешность вычисления $\delta^*$ при $x \leqslant 2$ ($0 < \Phi(x) \leqslant \leqslant 0{,}955$) не превышает 0,114.

Программа V.5.3.1.4/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | F $x^2$ | 55 | 10 | F $x^2$ | 55 |
| 01 | ↑ | 06 | 11 | 1 | 14 |
| 02 | P π | 23 | 12 | ←→ | 16 |
| 03 | : | 36 | 13 | — | 86 |
| 04 | /—/ | 56 | 14 | F $\sqrt{\ }^-$ | 65 |
| 05 | P $e^x$ | 33 | 15 | С/П | 78 |

Инструкция

x В/О С/П

Программа V.5.3.1.4/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | F $x^2$ | 22 | 05 | F $x^2$ | 22 | 10 | С/П | 50 |
| 01 | /—/ | 0L | 06 | 1 | 01 | | | |
| 02 | F π | 20 | 07 | ←→ | 14 | | Инструкция | |
| 03 | : | 13 | 08 | — | 11 | | | |
| 04 | F $e^x$ | 16 | 09 | F $\sqrt{\ }^-$ | 21 | | x В/О С/П | |

Время вычисления — 5 с.

*Пример.* x = 1. $\tilde{\Phi}$ (1) = 0,6862; Φ (1) = 0,682690.

## V.5.3.1.5. Вычисление $\tilde{\Phi}$(x) по формуле [7]

$$\tilde{\Phi}(x) = \sqrt{1 - \frac{e^{-x^2\left(\frac{2}{\pi} - k\right)}}{1 + kx^2}}, \quad k = 0{,}1523.$$

Относительная погрешность вычисления δ* при $x \leqslant 4$ ($0 < \Phi(x) \leqslant 1 - 6 \cdot 10^{-5}$) не превышает 1 %.

Значение k = 0,1523 вводится в регистр памяти 3 вручную и в процессе вычисления не изменяется, так что при повторных вычислениях $\tilde{\Phi}$ (x) значение k вводить не требуется.

Программа V.5.3.1.5/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | F $x^2$ | 55 | 05 | : | 36 | 14 | F 2 | 22 |
| 01 | P 2 | 21 | 10 | ↑ | 06 | 15 | ←→ | 16 |
| 02 | 2 | 24 | 11 | F 3 | 32 | 20 | × | 26 |
| 03 | ↑ | 06 | 12 | — | 86 | 21 | P $e^x$ | 33 |
| 04 | P π | 23 | 13 | ↑ | 06 | 22 | P 2 | 21 |

*Продолжение*

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 23 | F 3 | 32 | 34 | F 1/x | 45 |
| 24 | × | 26 | 35 | 1 | 14 |
| 25 | 1 | 14 | 40 | ←→ | 16 |
| 30 | + | 96 | 41 | — | 86 |
| 31 | ↑ | 06 | 42 | F $\sqrt{-}$ | 65 |
| 32 | F 2 | 22 | 43 | С/П | 78 |
| 33 | × | 26 | | | |

Инструкция
0,1523 Р3
x В/О С/П

Регистры
2 $x^2$
3 0,1523

Программа V.5.3.1.5/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | F $x^2$ | 22 | 10 | × | 12 |
| 01 | П→x 3 | 63 | 11 | 1 | 01 |
| 02 | 2 | 02 | 12 | + | 10 |
| 03 | F π | 20 | 13 | : | 13 |
| 04 | : | 13 | 14 | 1 | 01 |
| 05 | — | 11 | 15 | ←→ | 14 |
| 06 | × | 12 | 16 | — | 11 |
| 07 | F $e^x$ | 16 | 17 | F $\sqrt{-}$ | 21 |
| 08 | ←→ | 14 | 18 | С/П | 50 |
| 09 | П→x 3 | 63 | | | |

Инструкция
0,1523 x→П 3
x В/О С/П

Регистр
3 0,1523

Время вычисления — 7 с.
*Пример.* x = 4. $\widetilde{\Phi}$ (4) = 0,999937, Φ (4) = 0,9999366.

### V.5.3.2. ФУНКЦИЯ, ОБРАТНАЯ ИНТЕГРАЛУ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Обозначим x (z) = $z^{-1}$, где

$$z = \Phi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Приводятся программы вычисления $\widetilde{x}$ (z) с разной степенью точности и с разным временем счета.

#### V.5.3.2.1. Вычисление $\widetilde{x}$(z) по формуле [11]

$$\widetilde{x}(z) = \sqrt{-\pi \cdot \ln \sqrt{1-z^2}}.$$

Программа V.5.3.2.1/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | F $x^2$ | 55 | 10 | ↑ | 06 |
| 01 | 1 | 14 | 11 | P π | 23 |
| 02 | ←→ | 16 | 12 | × | 26 |
| 03 | — | 86 | 13 | /—/ | 56 |
| 04 | F $\sqrt{}$ | 65 | 14 | F $\sqrt{}$ | 65 |
| 05 | P ln | 13 | 15 | С/П | 78 |

Инструкция

z В/О С/П

Программа V.5.3.2.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | F $x^2$ | 22 | 05 | F ln | 18 |
| 01 | 1 | 01 | 06 | F π | 20 |
| 02 | ←→ | 14 | 07 | × | 12 |
| 03 | — | 11 | 08 | /—/ | 0L |
| 04 | F $\sqrt{}$ | 21 | 09 | F $\sqrt{}$ | 21 |

| Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|
| 10 | С/П | 50 |

Инструкция

z В/О С/П

Относительная погрешность вычисления $\delta = \frac{|\tilde{x}(z) - x(z)|}{x(z)}$ при $z < 0,99$ ($x(z) < 2,6$) не превышает 3,7 %. Время вычисления — 4с.

*Пример.* $z = 0,9876$. $\tilde{x}(0,9876) = 2,412$; $x(0,9876) = 2,500$.

### V.5.3.2.2. Вычисление $\tilde{x}(z)$ по формуле [7]

$$\tilde{x}(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot [-\ln(1 - z^k)]^{1/k}, \quad k = 1,898.$$

Программа V.5.3.2.2/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | ↑ | 06 | 15 | F 1/x | 45 |
| 01 | F 3 | 32 | 20 | ←→ | 16 |
| 02 | ←→ | 16 | 21 | $x^y$ | 38 |
| 03 | $x^y$ | 38 | 22 | 2 | 24 |
| 04 | 1 | 14 | 23 | F $\sqrt{}$ | 65 |
| 05 | ←→ | 16 | 24 | : | 36 |
| 10 | — | 86 | 25 | ↑ | 06 |
| 11 | P ln | 13 | 30 | P π | 23 |
| 12 | /—/ | 56 | 31 | F $\sqrt{}$ | 65 |
| 13 | ↑ | 06 | 32 | × | 26 |
| 14 | F 3 | 32 | 33 | С/П | 78 |

Инструкция

1,898 P 3

z В/О С/П

Регистр

3 1,898

Программа V.5.3.2.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | F lg | 17 | 09 | F ln | 16 | 18 | С/П | 50 |
| 01 | П→х Д | 6Г | 10 | П→х Д | 6Г | | | |
| 02 | × | 12 | 11 | : | 13 | | Инструкция | |
| 03 | F $10^x$ | 15 | 12 | F $e^x$ | 16 | | | |
| 04 | 1 | 01 | 13 | F π | 20 | | 1,898 х→П Д | |
| 05 | — | 11 | 14 | 2 | 02 | | z В/О С/П | |
| 06 | /—/ | 0L | 15 | : | 13 | | | |
| 07 | F ln | 18 | 16 | F $\sqrt{}^-$ | 21 | | Регистр | |
| 08 | /—/ | 0L | 17 | × | 12 | | Д 1,898 | |

Время вычисления — 10 с.

Относительная погрешность вычисления $\delta$ при $z < 1 - 1 \cdot 10^{-7}$ $(0 < x \leqslant 5{,}327)$ не превышает 1 %.

*Пример.* z = 0,9973. $\tilde{x}$ (0,9973) = 3,01; x (0,9973) = 3,0.

## V.5.3.2.3. Вычисление $\tilde{x}(z)$ по формуле [7]

$$\tilde{x}(z) = \sqrt{\pi \left\{ \frac{1}{41} [-\ln(1-z^4)]^{3/2} - \ln \sqrt{1-z^2} \right\}}.$$

Программа V.5.3.2.3/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | F $x^2$ | 55 | 21 | /—/ | 56 | 42 | Р π | 23 |
| 01 | 1 | 14 | 22 | 1 | 14 | 43 | × | 26 |
| 02 | — | 86 | 23 | , | 46 | 44 | F $\sqrt{}^-$ | 65 |
| 03 | /—/ | 56 | 24 | 5 | 54 | 45 | С/П | 78 |
| 04 | F $\sqrt{}^-$ | 65 | 25 | ←→ | 16 | | | |
| 05 | Р ln | 13 | 30 | $x^y$ | 38 | | Инструкция | |
| 10 | Р 3 | 31 | 31 | 4 | 44 | | | |
| 11 | ←→ | 16 | 32 | 1 | 14 | | z В/О С/П | |
| 12 | F $x^2$ | 55 | 33 | : | 36 | | | |
| 13 | 1 | 14 | 34 | ↑ | 06 | | Регистр | |
| 14 | ←→ | 16 | 35 | F 3 | 32 | | | |
| 15 | — | 86 | 40 | — | 86 | | 3 ln $\sqrt{1-z^2}$ | |
| 20 | Р ln | 13 | 41 | ↑ | 06 | | | |

Программа V.5.3.2.3/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | F $x^2$ | 22 | 10 | × | 12 | 20 | — | 11 |
| 01 | B ↑ | 0E | 11 | 4 | 04 | 21 | F π | 20 |
| 02 | F $x^2$ | 22 | 12 | 1 | 01 | 22 | × | 12 |
| 03 | 1 | 01 | 13 | : | 13 | 23 | F $\sqrt{\ }^-$ | 21 |
| 04 | — | 11 | 14 | ←→ | 14 | 24 | С/П | 50 |
| 05 | /—/ | 0L | 15 | 1 | 01 | | | |
| 06 | F ln | 18 | 16 | — | 11 | | Инструкция | |
| 07 | /—/ | 0L | 17 | /—/ | 0L | | | |
| 08 | B ↑ | 0E | 18 | F $\sqrt{\ }^-$ | 21 | | z В/О С/П | |
| 09 | F $\sqrt{\ }^-$ | 21 | 19 | F ln | 18 | | | |

Время вычисления — 11 с.

Относительная погрешность $\delta$ при $z < 1 - 1\cdot10^{-7}$ ($x \leqslant 5{,}327$) не превышает 0,3 %.

*Пример.* $z = 0{,}9545$. $\tilde{x}\,(0{,}9545) = 1{,}9955$: $x\,(0{,}9545) = 2{,}0$.

### V.5.3.2.4. Вычисление $\tilde{x}\,(z)$ при $z \simeq 1$

При $z$, близких к 1, ввод точного значения z невозможен из-за ограниченной разрядности представления числа.

Приведена программа вычисления $\tilde{x}\,(z)$ при вводе вместо z дополнения z до 1: $q = 1 - z$.

Вычисления производятся по формуле

$$\tilde{x}\,(1-q) = \sqrt{\pi\left\{\frac{1}{23}\,[-\ln(5q)]^{5/4} - \ln\sqrt{2q}\right\}}.$$

Относительная погрешность вычисления $\delta$ при $0{,}0455 > q > 1{,}244\cdot10^{-15}$ ($2 \leqslant x \leqslant 8$) не превышает 0,6 %.

Программа V.5.3.2.4/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | ↑ | 06 | 20 | 2 | 24 | 40 | × | 26 |
| 01 | + | 96 | 21 | 5 | 54 | 41 | F $\sqrt{\ }^-$ | 65 |
| 02 | F $\sqrt{\ }^-$ | 65 | 22 | ←→ | 16 | 42 | С/П | 78 |
| 03 | P ln | 13 | 23 | $x^y$ | 38 | | | |
| 04 | P 2 | 21 | 24 | 2 | 24 | | Инструкция | |
| 05 | ←→ | 16 | 25 | 3 | 34 | | | |
| 10 | 5 | 54 | 30 | : | 36 | | q В/О С/П | |
| 11 | × | 26 | 31 | ↑ | 06 | | | |
| 12 | P ln | 13 | 32 | F 2 | 22 | | Регистр | |
| 13 | /—/ | 56 | 33 | — | 86 | | | |
| 14 | 1 | 14 | 34 | ↑ | 06 | 2 | ln $\sqrt{2q}$ | |
| 15 | , | 46 | 35 | P π | 23 | | | |

Программа V.5.3.2.4/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | B ↑ | 0E | 09 | 2 | 02 | 18 | F π | 20 |
| 01 | F 1/x | 23 | 10 | 3 | 03 | 19 | × | 12 |
| 02 | 5 | 05 | 11 | : | 13 | 20 | F $\sqrt{-}$ | 21 |
| 03 | : | 13 | 12 | ←→ | 14 | 21 | С/П | 50 |
| 04 | F ln | 18 | 13 | B ↑ | 0E | | | |
| 05 | B ↑ | 0E | 14 | + | 10 | | Инструкция | |
| 06 | F $\sqrt{-}$ | 21 | 15 | F $\sqrt{-}$ | 21 | | | |
| 07 | F $\sqrt{-}$ | 21 | 16 | F ln | 18 | | q В/О С/П | |
| 08 | × | 12 | 17 | — | 11 | | | |

Время вычисления — 10 с.

*Пример.* $q = 2\cdot10^{-9}$ ($\gamma = 1 - 2\cdot10^{-9}$). $\tilde{x}\,(1 - 2\cdot10^{-9}) = 5{,}965$; $x\,(1 - 2\cdot10^{-9}) = 6$.

## V.5.4. $\chi^2$ -РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Сумма квадратов m независимых случайных величин $y = (x_k - \bar{x})/\sigma$ ($k = 1; 2; \ldots; m$) имеет $\chi^2$-распределение с m степенями свободы.

### V.5.4.1. ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ

Плотность вероятности $\chi^2$-распределения определяется из соотношения [14]

$$\varphi_m(x) = \frac{x^{\frac{m}{2}-1}\, e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{m}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \quad (x > 0).$$

По программе вычисляются значения $\varphi_m(x)$ при $m \geqslant 1$.

Программа V.5.4.1/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P 7 | 71 | 12 | : | 36 | 24 | — | 86 |
| 01 | ←→ | 16 | 13 | P 7 | 71 | 25 | P $e^x$ | 33 |
| 02 | P 8 | 81 | 14 | ↑ | 06 | 30 | ↑ | 06 |
| 03 | 2 | 24 | 15 | F 6 | 62 | 31 | F 8 | 82 |
| 04 | : | 36 | 20 | P ln | 13 | 32 | : | 36 |
| 05 | P 6 | 61 | 21 | × | 26 | 33 | P 8 | 81 |
| 10 | F 7 | 72 | 22 | ↑ | 06 | 34 | F 7 | 72 |
| 11 | 2 | 24 | 23 | F 6 | 62 | 35 | 1 | 14 |

*Продолжение*

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 40 | — | 86 | 53 | ↑ | 06 |
| 41 | P 7 | 71 | 54 | P π | 23 |
| 42 | ↑ | 06 | 55 | P ln | 13 |
| 43 | F 8 | 82 | 60 | × | 26 |
| 44 | ←→ | 16 | 61 | P $e^x$ | 33 |
| 45 | P x≠0 | 79 | 62 | ↑ | 06 |
| 50 | 5 | 54 | 63 | F 8 | 82 |
| 51 | P x<0 | 69 | 64 | × | 26 |
| 52 | P : | 33 | 65 | С/П | 78 |

Инструкция

x ↑ m В/О С/П

Регистры

6 x/2
7;8 оперативные

Программа V.5.4.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 0 | 40 | 13 | П→x 0 | 60 | 26 | F $e^x$ | 16 |
| 01 | 2 | 02 | 14 | : | 13 | 27 | × | 12 |
| 02 | : | 13 | 15 | П→x 2 | 62 | 28 | С/П | 50 |
| 03 | x→П 1 | 41 | 16 | 1 | 01 | | | |
| 04 | F ln | 18 | 17 | — | 11 | | Инструкция | |
| 05 | ←→ | 14 | 18 | x→П 2 | 42 | | | |
| 06 | 2 | 02 | 19 | F x≠0 | 57 | | m В↑ x В/О С/П | |
| 07 | : | 13 | 20 | 23 | 23 | | | |
| 08 | x→П 2 | 42 | 21 | F x<0 | 5C | | Регистры | |
| 09 | × | 12 | 22 | 14 | 14 | | | |
| 10 | П→x 1 | 61 | 23 | F π | 20 | | 0 x | |
| 11 | — | 11 | 24 | F ln | 18 | | 1 x/2 | |
| 12 | F $e^x$ | 16 | 25 | × | 12 | | 2 оперативный | |

Время вычисления — T = (10 + m) с.
*Пример.* m = 3; x = 2. $\varphi_3(2) = 0{,}20755$.

### V.5.4.2. ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Интегральный закон $\chi^2$-распределения определяется соотношением

$$F_m(x) = \int_0^x \varphi_m(t)\,dt = \frac{1}{2^{\frac{m}{2}}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^x t^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}}\,dt.$$

Приведены программы вычисления $F_m(x)$ как при четных m — как более короткая и требующая малое время для расчета, так и более длинная — вычисления $F_m(x)$ при произвольном m.

### V.5.4.2.1. Вычисление $F_m(x)$ при четных m

При четных $m \geqslant 2$ величина $F_m(x)$ представляется в виде конечного ряда по $x^i$:

$$F_m(x) = 1 - e^{-\frac{x}{2}} \sum_{i=0}^{\frac{m}{2}-1} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^i}{i!}.$$

Программа V.5.4.2.1/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P 2 | 21 | 24 | × | 26 | 52 | 1 | 14 |
| 01 | ←→ | 16 | 25 | P 4 | 41 | 53 | ←→ | 16 |
| 02 | P 3 | 31 | 30 | ↑ | 06 | 54 | — | 86 |
| 03 | /—/ | 56 | 31 | F 5 | 52 | 55 | С/П | 78 |
| 04 | P $e^x$ | 33 | 32 | + | 96 | | | |
| 05 | F $\sqrt{}^-$ | 65 | 33 | P 5 | 51 | | Инструкция | |
| 10 | P 4 | 41 | 34 | F 6 | 62 | | | |
| 11 | P 5 | 51 | 35 | 2 | 24 | | x ↑ m В/О С/П | |
| 12 | 2 | 24 | 40 | + | 96 | | | |
| 13 | ↑ | 06 | 41 | P 6 | 61 | | Регистры | |
| 14 | P 6 | 61 | 42 | ↑ | 06 | | | |
| 15 | F 3 | 32 | 43 | F 2 | 22 | | 2 m | |
| 20 | ←→ | 16 | 44 | — | 86 | | 3 x | |
| 21 | : | 36 | 45 | P x=0 | 59 | | 4—6 оперативные | |
| 22 | ↑ | 06 | 50 | ←→ | 16 | | | |
| 23 | F 4 | 42 | 51 | F 5 | 52 | | | |

Программа V.5.4.2.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 0 | 40 | 09 | F L0 | 5Г | 18 | С/П | 50 |
| 01 | 0 | 00 | 10 | 02 | 02 | | | |
| 02 | П→x 0 | 60 | 11 | ←→ | 14 | | Инструкция | |
| 03 | : | 13 | 12 | F $e^x$ | 16 | | | |
| 04 | × | 12 | 13 | F $\sqrt{}^-$ | 21 | | x В↑ m В/О С/П | |
| 05 | 1 | 01 | 14 | : | 13 | | | |
| 06 | + | 10 | 15 | 1 | 01 | | Регистр | |
| 07 | F L0 | 5Г | 16 | ←→ | 14 | | | |
| 08 | 09 | 09 | 17 | — | 11 | | 0 счетчик | |

Время вычисления — T = (m + 5) с.
*Пример.* m = 6, x = 1,635. $F_6(1{,}635) = 0{,}04997$.

### V.5.4.2.2. Вычисление $F_m(x)$ при произвольных m

При произвольных целых m для вычисления $F_m(x)$ используется следующее представление: при нечетных m ($m \geqslant 3$) функция $F_m(x)$ имеет вид

$$F_m(x) = \Phi(\sqrt{x}) - \sqrt{\frac{2x}{\pi}} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \sum_{i=0}^{\frac{m-3}{2}} \frac{x^i}{(2i+1)!!},$$

где $\Phi(\sqrt{x})$ — интеграл вероятностей;

а при четных m ($m \geqslant 2$) используется представление $F_m(x)$ из предыдущего раздела.

Интеграл вероятностей $\Phi(\sqrt{x})$ представляется приближенно в виде

$$\Phi(\sqrt{x}) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \simeq \sqrt{1 - \frac{e^{-x(2/\pi - k)}}{1+kx}}, \quad k = 0{,}145;$$

при $m \leqslant 29$ и $0{,}02 < F_m(x) < 0{,}99$ относительная погрешность $\delta^*$ вычисления $\tilde{F}_m(x)$ не превышает 1 %.

Программа V.5.4.2.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П Д | 4Г | 24 | 2 | 02 | 48 | F $\sqrt{-}$ | 21 |
| 01 | П→x 0 | 60 | 25 | : | 13 | 49 | + | 10 |
| 02 | × | 12 | 26 | x→П 1 | 41 | 50 | П→x Д | 6Г |
| 03 | x→П 3 | 43 | 27 | 2 | 02 | 51 | F L1 | 5L |
| 04 | П→x Д | 6Г | 28 | × | 12 | 52 | 40 | 40 |
| 05 | В↑ | 0E | 29 | F π | 20 | 53 | F $e^x$ | 16 |
| 06 | + | 10 | 30 | × | 12 | 54 | F $\sqrt{-}$ | 21 |
| 07 | F π | 20 | 31 | F cos | 1Г | 55 | : | 13 |
| 08 | : | 13 | 32 | F x⩾0 | 59 | 56 | — | 11 |
| 09 | x→П 2 | 42 | 33 | 37 | 37 | 57 | С/П | 50 |
| 10 | — | 11 | 34 | x→П 2 | 42 | | | |
| 11 | F $e^x$ | 16 | 35 | 0 | 00 | | Инструкция | |
| 12 | П→x 3 | 63 | 36 | x→П 3 | 43 | | | |
| 13 | 1 | 01 | 37 | Сх | 0Г | | Р/Г—в Р | |
| 14 | x→П 3 | 43 | 38 | БП | 51 | | 0,145 x→П/О | |
| 15 | + | 10 | 39 | 50 | 50 | | m В↑ x В/О С/П | |
| 16 | : | 13 | 40 | × | 12 | | | |
| 17 | 1 | 01 | 41 | П→x 1 | 61 | | Регистры | |
| 18 | — | 11 | 42 | 2 | 02 | | | |
| 19 | /—/ | 0L | 43 | × | 12 | | 0 0,145 | |
| 20 | F $\sqrt{-}$ | 21 | 44 | П→x 3 | 63 | | 1—3 оперативные | |
| 21 | ←→ | 14 | 45 | + | 10 | | Д x | |
| 22 | 2 | 02 | 46 | : | 13 | | | |
| 23 | + | 10 | 47 | П→x 2 | 62 | | | |

Время вычисления — $T = (2n + 16)$ с.

*Примеры.* $m = 8$, $x = 3{,}49$. $F_8(3{,}49) = 0{,}1$.

$m = 9$, $x = 4{,}168$. $F_9(4{,}168) = 0{,}1$.

## V.5.5. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СТЬЮДЕНТА

Распределению Стьюдента с n степенями свободы подчиняется отношение независимых случайных величин вида

$$t_n = \frac{z_0}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i^2}},$$

где $z_i$ ($i = 0; 1; \ldots; n$) распределены нормально с $\bar{z_i} = 0$ и одинаковыми дисперсиями $\sigma_z^2$ [14].

При этом распределение $t_n$ не зависит от величины дисперсии $\sigma_z^2$.

### V.5.5.1. ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ

Случайная величина $t_n$ имеет плотность вероятности (при $n \geqslant 1$) [14]

$$p_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

Программа V.5.5.1/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | F $x^2$ | 55 | 33 | P 6 | 61 | 70 | P 7 | 71 |
| 01 | ←→ | 16 | 34 | P π | 23 | 71 | F 8 | 82 |
| 02 | P 5 | 51 | 35 | ↑ | 06 | 72 | 1 | 14 |
| 03 | P 8 | 81 | 40 | БП | 58 | 73 | — | 86 |
| 04 | : | 36 | 41 | ВП | 66 | 74 | P 8 | 81 |
| 05 | 1 | 14 | 42 | F 7 | 72 | 75 | P x=0 | 59 |
| 10 | + | 96 | 43 | 2 | 24 | 80 | P , | 43 |
| 11 | P ln | 13 | 44 | × | 26 | 81 | F 7 | 72 |
| 12 | P 6 | 61 | 45 | ↑ | 06 | 82 | ↑ | 06 |
| 13 | F 8 | 82 | 50 | P π | 23 | 83 | F 6 | 62 |
| 14 | 1 | 14 | 51 | × | 24 | 84 | × | 26 |
| 15 | + | 96 | 52 | P 7 | 26 | 85 | С/П | 78 |
| 20 | /—/ | 56 | 53 | F 5 | 52 | | | |
| 21 | ↑ | 06 | 54 | ↑ | 06 | | Инструкция | |
| 22 | F 6 | 62 | 55 | F 8 | 82 | | | |
| 23 | × | 26 | 60 | — | 86 | | n ↑ t В/О С/П | |
| 24 | P $e^x$ | 33 | 61 | ↑ | 06 | | | |
| 25 | ↑ | 06 | 62 | F 7 | 72 | | Регистры | |
| 30 | F 8 | 82 | 63 | ←→ | 16 | | | |
| 31 | : | 36 | 64 | : | 36 | | 5 n | |
| 32 | F $\sqrt{-}$ | 65 | 65 | F 1/x | 45 | | 6—8 оперативные | |

Время вычисления — $T = 4\,(n + 1)$ с.

Программа V.5.5.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | F $x^2$ | 22 | 14 | П→x 0 | 60 | 28 | F 1/x | 23 |
| 01 | ←→ | 14 | 15 | : | 13 | 29 | F L0 | 5Г |
| 02 | x→П 0 | 40 | 16 | F $\sqrt{\ }$ | 21 | 30 | 20 | 20 |
| 03 | x→П 1 | 41 | 17 | F π | 20 | 31 | × | 12 |
| 04 | : | 13 | 18 | БП | 51 | 32 | С/П | 50 |
| 05 | 1 | 01 | 19 | 28 | 28 | | | |
| 06 | + | 10 | 20 | 2 | 02 | | Инструкция | |
| 07 | F ln | 18 | 21 | × | 12 | | | |
| 08 | П→x 0 | 60 | 22 | F π | 20 | | n В↑ t В/О С/П | |
| 09 | 1 | 01 | 23 | × | 12 | | | |
| 10 | + | 10 | 24 | П→x 1 | 61 | | Регистры | |
| 11 | /—/ | 0L | 25 | П→x 0 | 60 | | | |
| 12 | × | 12 | 26 | — | 11 | | 0 оперативный | |
| 13 | F $e^x$ | 16 | 27 | : | 13 | | 1 n | |

Время вычисления — $T = (2n + 11)$ с.
*Пример.* $n = 5$, $t = 2$. $p_8(2) = 0{,}0651$.

### V.5.5.2. ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Интегральный закон распределения Стьюдента получаем из $p_n(t)$ в виде [14]

$$S_n(t) = \int_{-t}^{t} p_n(x)\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi n}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \int_0^t \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx.$$

Обозначая $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{n}}$, запишем $S_n(t)$ в виде [7]:

$$S_n(t) = \begin{cases} \sin\varphi \cdot \sum\limits_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \cos^{2i}\varphi \prod\limits_{j=0}^{i-1} \frac{j+\frac{1}{2}}{j+1} & \text{при n-четном,} \\ \frac{2}{\pi} \cdot \left\{ \varphi + \operatorname{tg}\varphi \sum\limits_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \cos^{2i}\varphi \prod\limits_{j=1}^{i-1} \frac{j}{j+\frac{1}{2}} \right\} & \text{при n-нечетном.} \end{cases}$$

По программе V.5.5.2/21 $S_n(t)$ вычисляется только при четных n.

Программа V.5.5.2/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P 5 | 51 | 25 | ←→ | 16 | 54 | 1 | 14 |
| 01 | F $\sqrt{-}$ | 65 | 30 | P x=0 | 59 | 55 | + | 96 |
| 02 | : | 36 | 31 | : | 36 | 60 | P 6 | 61 |
| 03 | F $x^2$ | 55 | 32 | F 4 | 42 | 61 | БП | 58 |
| 04 | 1 | 14 | 33 | × | 26 | 62 | ←→ | 16 |
| 05 | P 6 | 61 | 34 | С/П | 78 | | | |
| 10 | + | 96 | 35 | F 3 | 32 | | Инструкция | |
| 11 | P 3 | 31 | 40 | : | 36 | | | |
| 12 | : | 36 | 41 | P 6 | 61 | | t ↑ n В/О С/П | |
| 13 | F $\sqrt{-}$ | 65 | 42 | F 5 | 52 | | | |
| 14 | P 4 | 41 | 43 | F 1/x | 45 | | Регистры | |
| 15 | F 5 | 52 | 44 | 1 | 14 | | | |
| 20 | 2 | 24 | 45 | ←→ | 16 | | 3 $1+t^2/n$ | |
| 21 | — | 86 | 50 | — | 86 | | 4 $1/\sqrt{1+n/t^2}$ | |
| 22 | P 5 | 51 | 51 | ↑ | 06 | | 5;6 оперативные | |
| 23 | ↑ | 06 | 52 | F 6 | 62 | | | |
| 24 | F 6 | 62 | 53 | × | 26 | | | |

Время вычисления — $T = (2n + 1)$ с.

По программе V.5.5.2/54,52 $S_n$ (t) вычисляется как при четных, так и при нечетных n.

Программа V.5.5.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 0 | 40 | 18 | С/П | 50 | 36 | 1 | 01 |
| 01 | F $\sqrt{-}$ | 21 | 19 | П→x 3 | 63 | 37 | + | 10 |
| 02 | : | 13 | 20 | × | 12 | 38 | F L0 | 5Г |
| 03 | x→П 2 | 42 | 21 | П→x 0 | 60 | 39 | 19 | 19 |
| 04 | F $tg^{-1}$ | 1L | 22 | : | 13 | 40 | × | 12 |
| 05 | F L0 | 5Г | 23 | F L0 | 5Г | 41 | С/П | 50 |
| 06 | 09 | 09 | 24 | 34 | 34 | | | |
| 07 | БП | 51 | 25 | П→x 2 | 62 | | | |
| 08 | 29 | 29 | 26 | × | 12 | | Инструкция | |
| 09 | x→П1 | 41 | 27 | П→x 1 | 61 | | | |
| 10 | F sin | 1C | 28 | + | 10 | | Р/Г—в Р | |
| 11 | FBx | 0 | 29 | Fп | 20 | | t В ↑ n В/О С/П | |
| 12 | F cos | 1Г | 30 | : | 13 | | | |
| 13 | F $x^2$ | 22 | 31 | 2 | 02 | | Регистры | |
| 14 | x→П3 | 43 | 32 | БП | 51 | | 0 оперативный | |
| 15 | F L0 | 5Г | 33 | 40 | 40 | | 1 $tg^{-1}(t/\sqrt{n})$ | |
| 16 | 21 | 21 | 34 | П→x 0 | 60 | | 2 $t/\sqrt{n}$ | |
| 17 | ←→ | 14 | 35 | × | 12 | | 3 $n/(n+t^2)$ | |

Время вычисления — $T=2(3+n)$ с.
*Примеры.*

$n=3,\ t=0{,}277.\quad S_3(0{,}277)=0{,}2.$

$n=4,\ t=0{,}271.\quad S_4(0{,}271)=0{,}2.$

### V.5.6. r-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Статистика случайной величины $x = r\sqrt{n-1}$, где r — выборочный коэффициент корреляции, а n — объем выборки, имеет r-распределение с n-2 степенями свободы [14]. При этом значение x лежит в пределах $-\sqrt{n-1} < x < \sqrt{n-1}$.

r-распределение используется для проверки гипотезы о некоррелированности ($\rho = 0$) пар случайных величин $x_i$, $y_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), описываемых двумерным нормальным распределением.

#### V.5.6.1. ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ

Плотность вероятности случайной величины x имеет вид [14]

$$\varphi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi(n-1)}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}\cdot\left(1-\frac{x^2}{n-1}\right)^{\frac{n-4}{2}}.$$

Программа V.5.6.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | Fx² | 22 | 16 | 2 | 02 | 32 | F1/x | 23 |
| 01 | ←→ | 14 | 17 | — | 11 | 33 | F L0 | 5Г |
| 02 | 1 | 01 | 18 | × | 12 | 34 | 24 | 24 |
| 03 | — | 11 | 19 | Fex | 16 | 35 | × | 12 |
| 04 | x→П 1 | 41 | 20 | П→x 1 | 61 | 36 | С/П | 50 |
| 05 | : | 13 | 21 | F $\sqrt{-}$ | 21 | | | |
| 06 | 1 | 01 | 22 | БП | 51 | | Инструкция | |
| 07 | — | 11 | 23 | 30 | 30 | | | |
| 08 | /—/ | 0L | 24 | 2 | 02 | n В↑x В/О С/П | | |
| 09 | F $\sqrt{-}$ | 21 | 25 | × | 12 | | | |
| 10 | F ln | 18 | 26 | П→x 2 | 62 | | Регистры | |
| 11 | П→x 1 | 61 | 27 | П→x 0 | 60 | | | |
| 12 | 1 | 01 | 28 | — | 11 | | 0 оперативный | |
| 13 | — | 11 | 29 | : | 13 | | 1 n—1 | |
| 14 | x→П 0 | 40 | 30 | Fπ | 20 | | 2 n—2 | |
| 15 | x→П 2 | 42 | 31 | × | 12 | | | |

Время вычисления — $T = (3n + 2)$ с.
*Пример.* $n = 5$, $x = 0{,}8$. $\varphi_5(2) = 0{,}2917$.

Интегральный закон распределения $F_n(x)$ случайной величины x определяется из соотношения

$$F_n(R) = 2\int_0^R \varphi_n(x)\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} \int_0^{R/\sqrt{n-1}} (1-x^2)^{\frac{n-4}{2}}\,dx,$$

$$0 \leqslant R < \sqrt{n-1}.$$

Для вычисления $F_n(R)$ при $n \geqslant 4$ используем соотношения[7]:

$$F_n(R) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} A_n,$$

где $A_n$ определяется из рекуррентного уравнения

$A_i = \cos^{i-4}\varphi \cdot \sin\varphi + (i-4)\,A_{i-2}$ $(i = 5, 7, \ldots, n$ или $i = 4,6, \ldots, n)$

при $A_3 = \varphi = \arcsin \frac{R}{\sqrt{n-1}}$.

Программа V.5.6.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 2 | 42 | 23 | Fπ | 20 | 46 | × | 12 |
| 01 | 1 | 01 | 24 | : | 13 | 47 | П→x 5 | 65 |
| 02 | x→П 1 | 41 | 25 | x→П 1 | 41 | 48 | × | 12 |
| 03 | — | 11 | 26 | П→x 5 | 65 | 49 | 1 | 01 |
| 04 | F$\sqrt{\ }$ | 21 | 27 | F $\sqrt{\ }$ | 21 | 50 | + | 10 |
| 05 | : | 13 | 28 | П→x 4 | 64 | 51 | F L2 | 58 |
| 06 | x→П 4 | 44 | 29 | × | 12 | 52 | 37 | 37 |
| 07 | F sin$^{-1}$ | 19 | 30 | x→П 4 | 44 | 53 | П→x 4 | 64 |
| 08 | F cos | 1Г | 31 | FBx | 0 | 54 | × | 12 |
| 09 | Fx$^2$ | 22 | 32 | F sin$^{-1}$ | 19 | 55 | + | 10 |
| 10 | x→П 5 | 45 | 33 | К П→x 2 | Г2 | 56 | П→x 1 | 61 |
| 11 | П→x 2 | 62 | 34 | Cx | 0Г | 57 | × | 12 |
| 12 | 2 | 02 | 35 | БП | 51 | 58 | С/П | 50 |
| 13 | : | 13 | 36 | 49 | 49 | | | |
| 14 | x→П 2 | 42 | 37 | П→x 2 | 62 | | Инструкция | |
| 15 | Fπ | 20 | 38 | 2 | 02 | | | |
| 16 | × | 12 | 39 | × | 12 | Р/Г—в Р | | |
| 17 | F sin | 1C | 40 | П→x 3 | 63 | R В↑п В/О С/П | | |
| 18 | Fx$^2$ | 22 | 41 | + | 10 | | | |
| 19 | x→П 3 | 43 | 42 | F1/x | 23 | | Регистры | |
| 20 | Fx≠0 | 57 | 43 | 1 | 01 | | | |
| 21 | 33 | 33 | 44 | — | 11 | | 1—5 оперативные | |
| 22 | 2 | 02 | 45 | /—/ | 0L | | | |

Время вычисления при четных n — $T = 2{,}5\,(n+2)$ с, при нечетных n — $T = 3\,(n+2)$ с.

*Примеры.* $n = 6$, $R = 0{,}7$. $F_6(0{,}7) = 0{,}4542$.

$n = 7$, $R = 0{,}7$. $F_7(0{,}7) = 0{,}4656$.

## V.5.7. F-РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Отношение двух случайных величин, имеющих $\chi^2$-распределение соответственно с m и n степенями свободы, имеет F-распределение.

Так как сумма квадратов случайных величин, имеющих нормальное распределение, подчиняется распределению $\chi^2$, то случайная величина z, имеющая F-распределение, определяется через случайные величины x и y, имеющие нормальное распределение, в виде [14]

$$z = \frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i^2}{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j^2}.$$

### V.5.7.1. ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ

Плотность вероятности F-распределения запишем с использованием бета-функции:

$$p_F(m, n, z) = \left(\frac{m}{2}\right)^{\frac{m}{2}} \cdot B^{-1}\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right) \cdot z^{\frac{m}{2}-1} \left(1 + \frac{m}{n} z\right)^{-\frac{m+n}{2}}.$$

Программа V.5.7.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 2 | 42 | 21 | 6 | 06 | 42 | F π | 20 |
| 01 | ←→ | 14 | 22 | x→П 0 | 40 | 43 | F ln | 18 |
| 02 | 2 | 02 | 23 | F. | 25 | 44 | × | 12 |
| 03 | : | 13 | 24 | ←→ | 14 | 45 | F ex | 16 |
| 04 | x→П 1 | 41 | 25 | П→x 5 | 65 | 46 | × | 12 |
| 05 | : | 13 | 26 | × | 12 | 47 | F 1/x | 23 |
| 06 | ←→ | 14 | 27 | — | 11 | 48 | F L0 | 5Г |
| 07 | 2 | 02 | 28 | F ex | 16 | 49 | 31 | 31 |
| 08 | : | 13 | 29 | П→x 2 | 62 | 50 | С/П | 50 |
| 09 | x→П 5 | 45 | 30 | × | 12 | | | |
| 10 | × | 12 | 31 | К П→x 0 | Г0 | | Инструкция | |
| 11 | F ln | 18 | 32 | F. | 25 | | | |
| 12 | F Bx | 0 | 33 | 1 | 01 | m B↑ n B↑ z B/O С/П | | |
| 13 | 1 | 01 | 34 | F Bx | 0 | | | |
| 14 | + | 10 | 35 | — | 11 | | Регистры | |
| 15 | F ln | 18 | 36 | F x<0 | 5С | | | |
| 16 | П→x 5 | 65 | 37 | 42 | 42 | 0 | счетчик | |
| 17 | П→x 1 | 61 | 38 | /—/ | 0L | 1 | n/2 | |
| 18 | + | 10 | 39 | × | 12 | 3 | (m+n)/2 | |
| 19 | x→П 3 | 43 | 40 | БП | 51 | 4 | z | |
| 20 | × | 12 | 41 | 33 | 33 | 5 | m/2 | |

Время вычисления — T = 3 (7 + m + n) с.

*Пример.* m = 4, n = 5, z = 6. $p_F$ (4, 5, 6) = 0,0123.

Интегральный закон F-распределения представляется в виде

$$F(m, n, z) = \int_0^z p_F(m, n, x)\,dx =$$

$$= \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \cdot B^{-1}\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right) \int_0^z x^{\frac{m}{2}-1} \left(1 + \frac{m}{n}x\right)^{-\frac{m+n}{2}} dx.$$

Полученный интеграл вычисляется в элементарных функциях, однако получающееся в общем случае выражение сложно.

Ниже приведены три программы вычисления функции $F$ (m, n, z) — для четного n, для четного m и для случая, когда n и m одновременно нечетные.

### V.5.7.2.1. n — четное

Функция F (m, n, z) при четном n вычисляется по формуле [7]:

$$F(m, n, z) = \frac{n}{\left(1 + \frac{n}{mz}\right)^{m/2}} \cdot \left(\prod_{i=1}^{n/2} \frac{m+2i-2}{2i}\right) \cdot X_{n/2},$$

где $X_{n/2}$ определяется с помощью рекуррентного соотношения

$$X_i = \frac{2(i-1)\,X_{i-1} + \left(1 + \frac{mz}{n}\right)^{1-i}}{2i+m-2}, \quad i = 1; 2; \ldots; \quad \frac{n}{2}.$$

Программа V.5.7.2.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | П→x 0 | 60 | 11 | 1 | 01 | 22 | × | 12 |
| 01 | : | 13 | 12 | + | 10 | 23 | П→x 1 | 61 |
| 02 | П→x 1 | 61 | 13 | x→П 4 | 44 | 24 | 2 | 02 |
| 03 | × | 12 | 14 | x→П 5 | 45 | 25 | : | 13 |
| 04 | B↑ | 0E | 15 | : | 13 | 26 | 1 | 01 |
| 05 | П→x 0 | 60 | 16 | F↑ | 21 | 27 | — | 11 |
| 06 | 2 | 02 | 17 | F ln | 18 | 28 | П→x 3 | 63 |
| 07 | : | 13 | 18 | П→x 1 | 61 | 29 | : | 13 |
| 08 | x→П 2 | 42 | 19 | × | 12 | 30 | 1 | 01 |
| 09 | x→П 3 | 43 | 20 | F $e^x$ | 16 | 31 | + | 10 |
| 10 | F. | 25 | 21 | П→x 0 | 60 | 32 | × | 12 |

*Продолжение*

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 33 | FL3 | 5— | 45 | : | 13 |
| 34 | 23 | 23 | 46 | x→П 4 | 44 |
| 35 | В↑ | 0E | 47 | + | 10 |
| 36 | П→x 0 | 60 | 48 | П→x 1 | 61 |
| 37 | П→x 2 | 62 | 49 | П→x 3 | 63 |
| 38 | — | 11 | 50 | + | 10 |
| 39 | П→x 2 | 62 | 51 | : | 13 |
| 40 | — | 11 | 52 | F L2 | 58 |
| 41 | x→П 3 | 43 | 53 | 36 | 36 |
| 42 | × | 12 | 54 | × | 12 |
| 43 | П→x 4 | 64 | 55 | С/П | 50 |
| 44 | П→x 5 | 65 | | | |

Инструкция

n x→П 0
m x→П 1
z В/О С/П

Регистры

0 n
1 m
2—5 оперативные

Время вычисления — T = 5 (n + 2) с.
*Пример.* m = 3, n = 4, z = 5. F (3, 4, 5) = 0,945.

### V.5.7.2.2. m — четное

При четном m значение F (m, n, z) вычисляется по формуле [7]:

$$F(m, n, z) = m\left\{\prod_{i=1}^{m/2} \frac{n+2i-2}{2i}\right\}\cdot Y_{m/2},$$

где $Y_{m/2}$ определяется из рекуррентного соотношения

$$Y_j = \frac{2(j-1)\,Y_{j-1}}{2j-m-2} + \frac{1-\cos^{m+n-2}\varphi}{m+n-2j}, \quad j = 2; 3;\ldots; m/2$$

при $Y_1 = \dfrac{1-\cos^{m+n-2}\varphi}{m+n-2}$, $\varphi = \arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{mz}{n}}}\right)$.

Программа V.5.7.2.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | П→x 0 | 60 | 11 | П→x 1 | 61 | 22 | П→x 2 | 62 |
| 01 | П→x 1 | 61 | 12 | + | 10 | 23 | П→x 3 | 63 |
| 02 | : | 13 | 13 | × | 12 | 24 | — | 11 |
| 03 | : | 13 | 14 | Fe$^x$ | 16 | 25 | П→x 2 | 62 |
| 04 | 1 | 01 | 15 | x→П 4 | 44 | 26 | : | 13 |
| 05 | + | 10 | 16 | П→x 1 | 61 | 27 | × | 12 |
| 06 | F 1/x | 23 | 17 | 2 | 02 | 28 | 1 | 01 |
| 07 | x→П 5 | 45 | 18 | : | 13 | 29 | П→x 4 | 64 |
| 08 | F$\sqrt{}$ | 21 | 19 | x→П 2 | 42 | 30 | П→x 5 | 65 |
| 09 | Fln | 18 | 20 | x→П 3 | 43 | 31 | : | 13 |
| 10 | П→x 0 | 60 | 21 | 1 | 01 | 32 | x→П 4 | 44 |

*Продолжение*

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 33 | — | 11 | 45 | 2 | 02 |
| 34 | П→x 2 | 62 | 46 | : | 13 |
| 35 | B↑ | 0E | 47 | П→x 1 | 61 |
| 36 | + | 10 | 48 | × | 12 |
| 37 | П→x 0 | 60 | 49 | x→П 1 | 41 |
| 38 | + | 10 | 50 | F. | 25 |
| 39 | 2 | 02 | 51 | + | 10 |
| 40 | — | 11 | 52 | F L2 | 58 |
| 41 | : | 13 | 53 | 22 | 22 |
| 42 | F Bx | 0 | 54 | П→x 1 | 61 |
| 43 | П→x 2 | 62 | 55 | × | 12 |
| 44 | : | 13 | 56 | С/П | 50 |

Инструкция

n x→П0
m x→П1
z В/О С/П

Регистры

0 n
1 m
2—5 оперативные

Время вычисления — T = (5m + 12) с.

*Пример.* m = 4, n = 5, z = 6. F (4, 5, 6) = 0,96212.

### V.5.7.2.3. m и n — нечетные

При нечетных как m, так и n функция F (m, n, z) определяется из соотношения [7]

$$F(m, n, z) = A_{m-1,\,n-1} \cdot \frac{2}{\pi} \left[ \prod_{i=1}^{\frac{m-1}{2}} \frac{m+n-2i}{m-2i} \right] \cdot \left[ \prod_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{n-2j+1}{n-2j} \right],$$

где $A_{m-1,\,n-1}$ определяется из рекуррентного соотношения

$$A_{i,n-1} = -\frac{\sin^{i-1}\varphi \cdot \cos^{n}\varphi}{n+i-1} + \frac{i-1}{n+i-1} A_{i-2,\,n-1}, \quad i = 2, 4, \ldots, m-1,$$

а $A_{0,n-1}$ — из рекуррентного соотношения

$$A_{0,j} = \frac{\sin\varphi \cdot \cos^{j-1}\varphi}{j} + \frac{j-1}{j} A_{0,j-2}, \quad j = 2, 4, \ldots, n-1$$

при $A_{0,0} = \varphi = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{mz}{n}}$.

Программа V.5.7.2.3/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 1 | 41 | 05 | F tg⁻¹ | 1L | 10 | F cos | 1Г |
| 01 | × | 12 | 06 | x→П 4 | 44 | 11 | x→П C | 4C |
| 02 | П→x 0 | 60 | 07 | F sin | 1C | 12 | x→П 7 | 47 |
| 03 | : | 13 | 08 | x→П 5 | 45 | 13 | F π | 20 |
| 04 | F√ | 21 | 09 | F Bx | 0 | 14 | 2 | 02 |

*Продолжение*

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | : | 13 | 39 | 1 | 01 | 63 | ←→ | 14 |
| 16 | x→П 9 | 49 | 40 | x→П 3 | 43 | 64 | П→x 5 | 65 |
| 17 | 1 | 01 | 41 | — | 11 | 65 | П→x 7 | 67 |
| 18 | x→П 6 | 46 | 42 | 2 | 02 | 66 | П→x 8 | 68 |
| 19 | П→x 0 | 60 | 43 | : | 13 | 67 | : | 13 |
| 20 | ПП | 53 | 44 | x→П 2 | 42 | 68 | x→П 7 | 47 |
| 21 | 39 | 39 | 45 | П→x 7 | 67 | 69 | : | 13 |
| 22 | x→П 4 | 44 | 46 | F $x^2$ | 22 | 70 | П→x 4 | 64 |
| 23 | П→x 5 | 65 | 47 | x→П 8 | 48 | 71 | : | 13 |
| 24 | x→П 7 | 47 | 48 | П→x 4 | 64 | 72 | — | 11 |
| 25 | П→x C | 6C | 49 | П→x 3 | 63 | 73 | FL 2 | 58 |
| 26 | F ln | 18 | 50 | 2 | 02 | 74 | 49 | 49 |
| 27 | П→x 0 | 60 | 51 | — | 11 | 75 | В/О | 52 |
| 28 | x→П 6 | 46 | 52 | x→П 3 | 43 | | | |
| 29 | × | 12 | 53 | В↑ | 0E | | | |
| 30 | $Fe^x$ | 16 | 54 | П→x 6 | 66 | | | |
| 31 | /—/ | 0L | 55 | — | 11 | | | |
| 32 | x→П 5 | 45 | 56 | x→П 4 | 44 | | | |
| 33 | П→x 1 | 61 | 57 | : | 13 | | | |
| 34 | ПП | 53 | 58 | × | 12 | | | |
| 35 | 39 | 39 | 59 | F В x | 0 | | | |
| 36 | П→x 9 | 69 | 60 | П→x 9 | 69 | | | |
| 37 | : | 13 | 61 | × | 12 | | | |
| 38 | С/П | 50 | 62 | x→П 9 | 49 | | | |

Инструкция

Р/Г—в Р
n x→П 0
z В↑ m В/О С/П

Регистры

0 n
1 m
2—9 оперативные
С1 / $\sqrt{1+n/mz}$

Время вычисления — T = 5 (m + n + 3) с.
*Пример.* m = 5, n = 7, z = 9. F (5, 7, 9) = 0,994114.

## V.6. ГЕНЕРАЦИЯ ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ

По приведенным программам генерируются псевдослучайные числа с различными законами распределения.

### V.6.1. РАВНОМЕРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Генерируются псе́водослучайные числа $\xi_1$ с равномерным законом распределения: p (x) = 1 при $0 \leqslant x \leqslant 1$, p (x) = 0 в остальных случаях.

Значения $\xi_1$ используются также в других разделах для генерации псевдослучайных чисел с законом распределения, отличным от нормального.

#### V.6.1.1. ЛИНЕЙНЫЙ КОНГРУЭНТНЫЙ МЕТОД

Используется алгоритм генерации [11]

$$\xi_{i+1} = F\{11\xi_i + \pi\},$$

где F {z} — дробная часть от z.

При начальном значении $\xi_0 = 0{,}5$ программа дает около 8000 неповторяющихся чисел. При других $\xi_0$ количество неповторяющихся чисел может оказаться существенно меньшим.

Программа V.6.1.1/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | F8 | 82 | 20 | — | 86 |
| 01 | 1 | 14 | 21 | 1 | 14 |
| 02 | 1 | 14 | 22 | ВП | 66 |
| 03 | × | 26 | 23 | 7 | 74 |
| 04 | ↑ | 06 | 24 | ←→ | 16 |
| 05 | Рп | 23 | 25 | + | 96 |
| 10 | + | 96 | 30 | — | 86 |
| 11 | Р8 | 81 | 31 | ↑ | 06 |
| 12 | 1 | 14 | 32 | F8 | 82 |
| 13 | , | 46 | 33 | + | 96 |
| 14 | 8 | 84 | 34 | Р8 | 81 |
| 15 | F1/x | 45 | 35 | С/П | 78 |

Инструкция
0,5 Р 8
В/О С/П В/О С/П
В/О С/П...

Результат
$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$

Регистр
8 $\xi_1$

Программа V.6.1.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | П→хД | 6Г | 07 | КП→хД | ГГ |
| 01 | 1 | 01 | 08 | ←→ | 14 |
| 02 | 1 | 01 | 09 | П→хД | 6Г |
| 03 | × | 12 | 10 | — | 11 |
| 04 | Fп | 20 | 11 | х→ПД | 4Г |
| 05 | + | 10 | 12 | С/П | 50 |
| 06 | х→ПД | 4Г | | | |

Инструкция
0,5 х→П Д
В/О С/П В/О С/П
В/О С/П...

Результат
$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$

Регистр
Д$\xi_i$

Программа V.6.1.1/52 может быть сокращена на 4 команды при замене команд с адресами 06 — 10 одной командой К {x}.

Время генерации одного числа — 2 — 4 с.

*Пример.* $\xi_1 = 0{,}6416$, $\xi_2 = 0{,}1991$, $\xi_3 = 0{,}3318$, ...

### V.6.1.2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СЧЕТЧИКА

Алгоритм генерации [7]

$$\xi_{(i+1)} = F\{\xi_i / z_i + \pi\},$$

где

$$\xi_0 = 0,\ z_0 = 0{,}011,\ z_{i+1} = z_i + 1 \cdot 10^{-8}.$$

Программа дает около $10^8$ неповторяющихся чисел.

Программа V.6.1.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Инструкция |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | К П→х 4 | Г4 | 07 | К П→х Д | ГГ | 0,009 х→П 4 0 х→П Д |
| 01 | F π | 20 | 08 | ←→ | 14 | В/О С/П В/О С/П |
| | | | | | | В/О С/П... |
| 02 | П→х Д | 6Г | 09 | П→х Д | 6Г | Результат |
| 03 | П→х 4 | 64 | 10 | — | 11 | $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ |
| 04 | : | 13 | 11 | х→П Д | 4Г | Регистры |
| 05 | + | 10 | 12 | С/П | 50 | 4 $z_1$ |
| 06 | х→П Д | 4Г | | | | Д $\xi_1$ |

Программа V.6.1.2/52 может быть сокращена на 4 команды при замене команд с адресами 06—10 одной командой К {x}.

Время генерации одного числа — 3 — 4 с.

*Пример.* $\xi_1 = 0{,}1416$, $\xi_2 = 0{,}8741$, $\xi_3 = 0{,}2642$, ...

### V.6.1.3. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД

Алгоритм генерации [7]

$$\xi_{i+1} = \frac{1}{\pi} \arccos[\cos(10^9 \cdot \xi_i)].$$

Программа V.6.1.3/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Инструкция |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | П→х Д | 6Г | 05 | Fπ | 20 | |
| 01 | ВП | 0С | 06 | : | 13 | Р/Г—в Р |
| 02 | 9 | 09 | 07 | х→П Д | 4Г | |
| 03 | F cos | 1Г | 08 | С/П | 50 | 0 х→П Д |
| 04 | F $\cos^{-1}$ | 1— | | | | В/О С/П В/О С/П |
| | | | | | | В/О С/П... |
| | | | | | | Результат |
| | | | | | | $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ |
| | | | | | | Регистр |
| | | | | | | Д $\xi_1$ |

При начальном значении $\xi_0 = 0$ генерируются около 4500 неповторяющихся чисел.

Время генерации одного числа — 4,5 с.

*Пример.* $\xi_1 = 0{,}386$, $\xi_2 = 0{,}881$, ...

### V.6.1.4. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД СО СЧЕТЧИКОМ

Алгоритм генерации [7]

$$\xi_{i+1} = \frac{1}{\pi} \arccos\{\cos[(i+100)\,\xi_i]\}.$$

Алгоритм дает около $10^9$ неповторяющихся чисел.

Программа V.6.1.4/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | КП→х 4 | Г4 | 06 | F cos$^{-1}$ | 1— |
| 01 | П→х 4 | 64 | 07 | Fл | 20 |
| 02 | П→х Д | 6Г | 08 | : | 13 |
| 03 | ВП | 0С | 09 | х→ПД | 4Г |
| 04 | × | 12 | 10 | С/П | 50 |
| 05 | F cos | 1Г | | | |

Инструкция

Р/Г—в Р
100 х→П 4
Сх х→П Д
В/О С/П В/О С/П
В/О С/П...

Результат

$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$

Регистры

4 счетчик
Д $\xi_1$

Время генерации одного числа — 5,5 с.
*Пример.* $\xi_1 = 0{,}1493$, $\xi_2 = 0{,}8474$, $\xi_3 = 0{,}2178$, ...

### V.6.2. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Генерируются псевдослучайные числа $\eta_i$, распределенные по нормальному закону

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Значения $\eta_{2i-1}$, $\eta_{2i}$ генерируются из $\xi_i$ ($i = 1, 2, 3, \ldots$) по правилу [33]

$$\eta_{2i-1} = (-2\ln\xi_i)^{\frac{1}{2}} \cdot \cos(e^9 \cdot \xi_i);$$

$$\eta_{2i} = (-2\ln\xi_i)^{\frac{1}{2}} \cdot \sin(e^9 \cdot \xi_i).$$

**V.6.2.1.** Значения $\xi_i$ вырабатываются с помощью линейного конгруэнтного метода (V.6.1.1).

Между обращениями к программе регистр используется для хранения $\xi_i$, поэтому его нельзя использовать для других целей.

Программа V.6.2.1/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | F8 | 82 | 31 | ↑ | 06 | 62 | P sin | 93 |
| 01 | 1 | 14 | 32 | F8 | 82 | 63 | ↑ | 06 |
| 02 | 1 | 14 | 33 | + | 96 | 64 | F7 | 72 |
| 03 | × | 26 | 34 | P8 | 81 | 65 | × | 26 |
| 04 | ↑ | 06 | 35 | 9 | 94 | 70 | С/П | 78 |
| 05 | Pπ | 23 | 40 | Pex | 33 | 71 | БП | 58 |
| 10 | + | 96 | 41 | × | 26 | 72 | P0 | 01 |
| 11 | P8 | 81 | 42 | P6 | 61 | | | |
| 12 | 1 | 14 | 43 | P cos | 83 | | | |
| 13 | , | 46 | 44 | ↑ | 06 | | | |
| 14 | 8 | 84 | 45 | F8 | 82 | | | |
| 15 | F1/x | 45 | 50 | Fx² | 55 | | | |
| 20 | — | 86 | 51 | P ln | 13 | | | |
| 21 | 1 | 14 | 52 | /—/ | 56 | | | |
| 22 | ВП | 66 | 53 | F$\sqrt{}$ | 65 | | | |
| 23 | 7 | 74 | 54 | P7 | 71 | | | |
| 24 | ←→ | 16 | 55 | × | 26 | | | |
| 25 | + | 96 | 60 | С/П | 78 | | | |
| 30 | — | 86 | 61 | F6 | 62 | | | |

Инструкция

0,5 P 8
В/О С/П С/П С/П...

Результат

$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots$

Регистры

6; 7 оперативные
8 $\xi_1$

Программа V.6.2.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | П→x 8 | 68 | 16 | F cos | 1Г |
| 01 | 1 | 01 | 17 | П→x 8 | 68 |
| 02 | 1 | 01 | 18 | F x² | 22 |
| 03 | × | 12 | 19 | F ln | 18 |
| 04 | Fπ | 20 | 20 | /—/ | 0L |
| 05 | + | 10 | 21 | F$\sqrt{}$ | 21 |
| 06 | x→П 8 | 48 | 22 | x→ПВ | 4L |
| 07 | К П→x 8 | Г8 | 23 | × | 12 |
| 08 | ←→ | 14 | 24 | С/П | 50 |
| 09 | П→x 8 | 68 | 25 | П→x С | 6С |
| 10 | — | 11 | 26 | F sin | 1С |
| 11 | x→П 8 | 48 | 27 | П→x В | 6L |
| 12 | 9 | 09 | 28 | × | 12 |
| 13 | F ex | 16 | 29 | С/П | 50 |
| 14 | × | 12 | 30 | БП | 51 |
| 15 | x→П С | 4С | 31 | 00 | 00 |

Инструкция

Р/Г—в Р
0,5 x→П 8
В/О С/П С/П С/П...

Результат

$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots$

Регистры

В, С оперативные
8 $\xi_1$

Программа V.6.2.1/52 может быть сокращена на 4 команды при замене команд с адресами 06—10 одной командой К {x}.

Время вычисления одного значения $\eta_1$ — 3 — 13 с.

*Пример.* $\eta_1 = -0{,}845$, $\eta_2 = 0{,}416$, ...

**V.6.2.2.** Значения $\xi_i$ вырабатываются с помощью метода V.6.1.2.
В регистрах 4 и Д хранятся промежуточные результаты для вычисления последующих значений $\eta_i$, поэтому эти регистры нельзя использовать для других целей.

Программа V.6.2.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | КП→х 4 | Г4 | 16 | F cos | 1Г |
| 01 | Fπ | 20 | 17 | П→х Д | 6Г |
| 02 | П→х Д | 6Г | 18 | $Fx^2$ | 22 |
| 03 | П→х 4 | 64 | 19 | F ln | 18 |
| 04 | : | 13 | 20 | /—/ | 0L |
| 05 | + | 10 | 21 | $F\sqrt{}$ | 21 |
| 06 | х→П Д | 4Г | 22 | х→П В | 4L |
| 07 | КП→х Д | ГГ | 23 | × | 12 |
| 08 | ←→ | 14 | 24 | С/П | 50 |
| 09 | П→х Д | 6Г | 25 | П→х С | 6С |
| 10 | — | 11 | 26 | F sin | 1С |
| 11 | х→П Д | 4Г | 27 | П→х В | 6L |
| 12 | 9 | 09 | 28 | × | 12 |
| 13 | $Fe^x$ | 16 | 29 | С/П | 50 |
| 14 | × | 12 | 30 | БП | 51 |
| 15 | х→П С | 4С | 31 | 00 | 00 |

Инструкция

Р/Г—в Р
0,011 х→П 4
0,3 х→П Д
В/О С/П С/П С/П...

Результат
$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots$

Регистры

4 счетчик
В,С оперативные
Д $\xi_1$

Программа V.6.2.2/52 может быть сокращена на 4 команды при замене команд с адресами 06—10 одной командой К {х}.
Время вычисления одного значения $\eta_i$ — 3 — 12 с.
*Пример.* $\eta_1 = -0{,}5816$, $\eta_2 = 1{,}1933$, $\eta_3 = -0{,}6147$, ...

### V.6.3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА

Генерируются псевдослучайные целые числа $n_i$, распределенные по закону Пуассона

$$p(n) = \frac{\lambda}{n!} e^{-\lambda}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Алгоритм генерации состоит в определении $n_i$, при котором выполняется соотношение [31]

$$\prod_{k=1}^{n_i} \xi_k \geqslant e^{-\lambda} > \prod_{k=1}^{n_i+1} \xi_k,$$

где $\xi_k$ генерируются по программе V.6.1.2.

В регистрах 5, Д хранятся промежуточные результаты, поэтому эти регистры нельзя использовать для других целей.

Программа V.6.3/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | /—/ | 0L | 16 | К П→х Д | ГГ |
| 01 | F $e^x$ | 16 | 17 | F. | 25 |
| 02 | х→П С | 4С | 18 | П→х Д | 6Г |
| 03 | 1 | 01 | 19 | — | 11 |
| 04 | х→П 4 | 44 | 20 | х→П Д | 4Г |
| 05 | + | 10 | 21 | × | 12 |
| 06 | К П→х 4 | Г4 | 22 | — | 11 |
| 07 | К П→х 5 | Г5 | 23 | Fx⩾0 | 59 |
| 08 | П→х С | 6С | 24 | 06 | 06 |
| 09 | F Вх | 0 | 25 | П→х 4 | 64 |
| 10 | П→х Д | 6Г | 26 | 2 | 02 |
| 11 | П→х 5 | 65 | 27 | — | 11 |
| 12 | : | 13 | 28 | С/П | 50 |
| 13 | F π | 20 | 29 | БП | 51 |
| 14 | + | 10 | 30 | 03 | 03 |
| 15 | х→П Д | 4Г | | | |

Инструкция

0 х→П Д
0,011 х→П 5
λВ/О С/П С/П С/П...

Результат

$n_1$, $n_2$, $n_3$,...

Регистры

4 $n_i$+2
5 оперативный
С $e^{-\lambda}$
Д $\xi_k$

Программа V.6.3/52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | /—/ | 0L | 14 | Fπ | 20 |
| 01 | F$e^x$ | 16 | 15 | + | 10 |
| 02 | х→П С | 4С | 16 | К{x} | 35 |
| 03 | Сх | 0Г | 17 | х→П Д | 4Г |
| 04 | х→П 4 | 44 | 18 | × | 12 |
| 05 | 1 | 01 | 19 | — | 11 |
| 06 | + | 10 | 20 | Fx⩾0 | 59 |
| 07 | К П→х 4 | Г4 | 21 | 07 | 07 |
| 08 | К П→х 5 | Г5 | 22 | П→х 4 | 64 |
| 09 | П→х С | 6С | 23 | 1 | 01 |
| 10 | F Вх | 0 | 24 | — | 11 |
| 11 | П→х Д | 6Г | 25 | С/П | 50 |
| 12 | П→х 5 | 65 | 26 | БП | 51 |
| 13 | : | 13 | 27 | 03 | 03 |

Инструкция

0 х→П Д
0,011 х→П 5
λ В/О С/П С/П С/П...

Результат

$n_1$, $n_2$, $n_3$, ...

Регистры

4 $n_1$+2
5 оперативный
С$e^{-\lambda}$
Д $\xi_k$

Время генерации одного значения $n_1$ — $T = [(4—6)\cdot n_1 + 10]$ с.
*Пример.* $\lambda = \pi$. $n_1 = 1$, $n_2 = 6$, $n_3 = 9$, $n_4 = 2$, ...

### V.6.4. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЭЛЕЯ

Для генерации псевдослучайных чисел, распределенных по закону Рэлея

$$p(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}},$$

используется алгоритм [31]

$$\eta_i = \sqrt{-2 \ln \xi_i},$$

где $\xi_i$ генерируются по программе V.6.1.1.

Регистр Д используется для хранения $\xi_1$ и не может быть использован для других целей.

Программа V.6.4/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | F 8 | 82 | 22 | ВП | 66 |
| 01 | 1 | 14 | 23 | 7 | 74 |
| 02 | 1 | 14 | 24 | ←→ | 16 |
| 03 | × | 26 | 25 | + | 96 |
| 04 | ↑ | 06 | 30 | − | 86 |
| 05 | Рп | 23 | 31 | ↑ | 06 |
| 10 | + | 96 | 32 | F 8 | 82 |
| 11 | Р 8 | 81 | 33 | + | 96 |
| 12 | 1 | 14 | 34 | Р 8 | 81 |
| 13 | , | 46 | 35 | F $x^2$ | 55 |
| 14 | 8 | 84 | 40 | Р ln | 13 |
| 15 | F 1/x | 45 | 41 | /—/ | 56 |
| 20 | — | 86 | 42 | F$\sqrt{}$ | 65 |
| 21 | 1 | 14 | 43 | С/П | 78 |

Инструкция

0,5 Р 8
В/О С/П В/О С/П
В/О С/П ...

Результат

$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots$

Регистр

8 $\xi_1$

Программа V.6.4/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | П→х Д | 6Г | 09 | П→х Д | 6Г |
| 01 | 1 | 01 | 10 | — | 11 |
| 02 | 1 | 01 | 11 | х→П Д | 4Г |
| 03 | × | 12 | 12 | F $x^2$ | 22 |
| 04 | Fп | 20 | 13 | F ln | 18 |
| 05 | + | 10 | 14 | /—/ | 0L |
| 06 | х→П Д | 4Г | 15 | F$\sqrt{}$ | 21 |
| 07 | К П→х Д | ГГ | 16 | С/П | 50 |
| 08 | ←→ | 14 | | | |

Инструкция

0,5 х→П Д
В/О С/П В/О С/П
В/О С/П...

Результат

$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots$

Регистр
Д $\xi_i$

Программа V.6.4/52 может быть сокращена на 4 команды при замене команд с адресами 06—10 одной командой К {х}.

Время генерации одного значения $\eta_1$ — 5 — 6 с.

*Пример.* $\eta_1 = 0{,}9421$, $\eta_2 = 1{,}7966$, ...

## V.7. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

В этом разделе рассматривается корреляционный и регрессионный анализ, дисперсионный анализ, дискриминационный анализ и метод конкордации (согласованности мнений экспертов).

### V.7.1. КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ И РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

#### V.7.1.1. КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯЦИИ И УРАВНЕНИЕ РЕГРЕССИИ

Вычисляется коэффициент корреляции последовательности пар случайных величин $x_i$, $y_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$):

$$r = \frac{\sum_i x_i y_i - \frac{1}{n}\sum_i x_i \sum_i y_i}{\sqrt{\left[\sum_i x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_i x_i\right)^2\right]\left[\sum_i y_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_i y_i\right)^2\right]}};$$

где

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_i x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_i y_i;$$

$$\sigma_x^2 = \sum_i x_i^2 - (\bar{x})^2;$$

$$\sigma_y^2 = \sum_i y_i^2 - (\bar{y})^2;$$

а также коэффициенты a и b уравнения регрессии Y на X:

$$y = a + bx;$$

$$b = \frac{\sum_i x_i y_i - \frac{1}{n}\sum_i x_i \sum_i y_i}{\sum_i x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_i x_i\right)^2};$$

$$a = \frac{1}{n}\left(\sum_i y_i - b\sum_i x_i\right)$$

(при расчете по программе V.7.1.1/21 $\sigma_y^2$ не вычисляется).

Программа V.7.1.1/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | В/О | 48 | 42 | + | 96 | 84 | F 4 | 42 |
| 01 | Р 6 | 61 | 43 | Р /—/ | 53 | 85 | : | 36 |
| 02 | С/П | 78 | 44 | ↑ | 06 | 90 | ↑ | 06 |
| 03 | Р 2 | 21 | 45 | В/О | 48 | 91 | Р /—/ | 53 |
| 04 | × | 26 | 50 | Р /—/ | 53 | 92 | + | 96 |
| 05 | Р 3 | 31 | 51 | Р 5 | 51 | 93 | ↑ | 06 |
| 10 | Р /—/ | 53 | 52 | F $x^2$ | 55 | 94 | F 6 | 62 |
| 11 | ПП | 68 | 53 | ПП | 68 | 95 | : | 36 |
| 12 | F : | 35 | 54 | 8 | 84 | | | |
| 13 | F 2 | 22 | 55 | ←→ | 16 | | Регистры | |
| 14 | ←→ | 16 | 60 | Р 6 | 61 | | | |
| 15 | ПП | 68 | 61 | Р /—/ | 53 | 2 | $y_1$; a | |
| 20 | F : | 35 | 62 | Р 7 | 71 | 3 | $x_1$ $y_1$; b | |
| 21 | F 3 | 32 | 63 | F $x^2$ | 55 | 4 | —i; —n | |
| 22 | + | 96 | 64 | ПП | 68 | 5 | $\Sigma x$ | |
| 23 | Р /—/ | 53 | 65 | 8 | 84 | 6 | r | |
| 24 | 1 | 14 | 70 | F 6 | 62 | 7 | $\Sigma y$ | |
| 25 | — | 86 | 71 | Р 8 | 81 | 8 | $n \cdot \sigma_x^2$ | |
| 30 | Р 4 | 41 | 72 | × | 26 | S1 | $\Sigma x$ | |
| 31 | Р /—/ | 53 | 73 | F $\sqrt{}$ | 65 | S2 | $\Sigma x^2$ | |
| 32 | F 4 | 42 | 74 | Р 6 | 61 | S3 | $\Sigma y$ | |
| 33 | В/О | 48 | 75 | F 5 | 52 | S4 | $\Sigma y^2$ | |
| 34 | + | 96 | 80 | ↑ | 06 | S5 | $\Sigma xy$ | |
| 35 | Р /—/ | 53 | 81 | F 7 | 72 | S6 | —i; —n | |
| 40 | ←→ | 16 | 82 | × | 26 | | | |
| 41 | F $x^2$ | 55 | 83 | ↑ | 06 | | | |

Время занесения и обработки одной пары чисел — 5 с, время дальнейших вычислений в автоматическом режиме — 10 с.

Инструкция V.7.1.1/21

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Очистить стек | | шесть раз Сх Р /—/ | |
| 2. Перейти к началу программы | | В/О С/П | 0 |
| 3. Занести очередную пару чисел $x_1$, $y_1$ | $x_1$<br>$y_1$ | ↑<br>С/П | $x_1$<br>—1 |
| 4. Если данные исчерпаны, далее, иначе — к п. 3 | | | |
| 5. Вычислить коэффициент корреляции r | | БП Р 5 С/П | r—в рег. X; 6 |
| 6. Вычислить коэффициент b уравнения регрессии | | F 8 : Р 3 | b—в рег. X, 3 |

*Продолжение*

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 7. Вычислить параметр a уравнения регрессии | | ↑ F 5 × ↑ F 7 — ↑ F 4 : P 2 | a—в рег. X, 2 |
| 8. Вычислить $\bar{x}$ | | F 5 ↑ F 4 : /—/ | $\bar{x}$ |
| 9. Вычислить $\bar{y}$ | | F 7 ↑ F 4 : /—/ | $\bar{y}$ |
| 10 Вычислить $\sigma_x^2$ | | F 8 ↑ F 4 : /—/ | $\sigma_x^2$ |

Программа V.7.1.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | Cx | 0Г | 29 | x→П 4 | 44 | 58 | F x² | 22 |
| 01 | x→П 1 | 41 | 30 | К П→x 6 | Г6 | 59 | — | 11 |
| 02 | x→П 3 | 43 | 31 | П→x 7 | 67 | 60 | x→П 5 | 45 |
| 03 | x→П 4 | 44 | 32 | П→x 2 | 62 | 61 | × | 12 |
| 04 | x→П 5 | 45 | 33 | + | 10 | 62 | F ‾¹ | 21 |
| 05 | x→П 6 | 46 | 34 | БП | 51 | 63 | : | 13 |
| 06 | x→П 2 | 42 | 35 | 06 | 06 | 64 | x→П 0 | 40 |
| 07 | П→x 6 | 66 | 36 | 5 | 05 | 65 | П→x 3 | 63 |
| 08 | С/П | 50 | 37 | x→П 0 | 40 | 66 | П→x 8 | 68 |
| 09 | x→П 8 | 48 | 38 | П→x 0 | 60 | 67 | П→x 4 | 64 |
| 10 | ←→ | 14 | 39 | x→П 9 | 49 | 68 | : | 13 |
| 11 | x→П 7 | 47 | 40 | К П→x 9 | Г9 | 69 | x→П 8 | 48 |
| 12 | × | 12 | 41 | П→x 6 | 66 | 70 | П→x 2 | 62 |
| 13 | П→x 1 | 61 | 42 | : | 13 | 71 | × | 12 |
| 14 | + | 10 | 43 | К x→П 9 | L9 | 72 | — | 11 |
| 15 | x→П 1 | 41 | 44 | F L0 | 5Г | 73 | x→П 7 | 47 |
| 16 | П→x 8 | 68 | 45 | 38 | 38 | 74 | С/П | 50 |
| 17 | П→x 3 | 63 | 46 | П→x 2 | 62 | | | |
| 18 | + | 10 | 47 | П→x 3 | 63 | | | |
| 19 | x→П 3 | 43 | 48 | × | 12 | | | |
| 20 | П→x 8 | 68 | 49 | — | 11 | | | |
| 21 | F x² | 22 | 50 | x→П 8 | 48 | | | |
| 22 | П→x 5 | 65 | 51 | П→x 4 | 64 | | | |
| 23 | + | 10 | 52 | П→x 2 | 62 | | | |
| 24 | x→П 5 | 45 | 53 | F x² | 22 | | | |
| 25 | П→x 7 | 67 | 54 | — | 11 | | | |
| 26 | F x² | 22 | 55 | x→П 4 | 44 | | | |
| 27 | П→x 4 | 64 | 56 | П→x 5 | 65 | | | |
| 28 | + | 10 | 57 | П→x 3 | 63 | | | |

Регистры

| | |
|---|---|
| 0 | счетчик; r |
| 1 | $\Sigma xy$ |
| 2 | $\Sigma x$; $\bar{x}$ |
| 3 | $\Sigma y$; $\bar{y}$ |
| 4 | $\Sigma x^2$; $\sigma_x^2$ |
| 5 | $\Sigma y^2$; $\sigma_y^2$ |
| 6 | i; n |
| 7 | $x_1$; a |
| 8 | $y_1$; b |
| 9 | счетчик |

Время занесения и обработки одной пары чисел —8 — 10 с, время вычисления параметров — 18 — 25 с.

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Очистить сумматоры | | В/О С/П | 0 |
| 2. Занести очередную пару чисел $x_i$, $y_i$ | $x_i$<br>$y_i$ | В ↑<br>С/П | $x_i$<br>i |
| 3. Если исходные данные исчерпаны, далее, нет — к п. 2 | | | |
| 4. Вычислить искомые параметры | | БП 36 С/П | a — в рег. X,7<br>b — в рег. 8<br>r — в рег. 0<br>$\bar{x}$ — в рег. 2<br>$\bar{y}$ — в рег. 3<br>$\sigma_x^2$ — в рег. 4<br>$\sigma_y^2$ — в рег. 5 |

*Пример.* Вычислить параметры распределения по выборке $(x_i; y_i)$ 1;1 2;2 4;3.

Ответ: a = 0,5, b = 0,643 (уравнение регрессии Y на X: y = 0,5+ + 0,643 x), r = 0,982, $\bar{x} = 2{,}333$, $\bar{y} = 2$, $\sigma_x^2 = 1{,}556$, $\sigma_y^2 = 0{,}667$.

## V.7.1.2. ИНТЕРВАЛЬНАЯ ОЦЕНКА КОЭФФИЦИЕНТА КОРРЕЛЯЦИИ

Вычисляются значения границ доверительного интервала $\rho_1$ и $\rho_2$, в котором с заданной вероятностью P находится истинный коэффициент корреляции генеральной совокупности $\rho$.

Для определения $\rho_1$ и $\rho_2$ используются вычисленное значение коэффициента корреляции $r$ и соотношения, полученные на основе $z$-преобразования Фишера [20]

$$\rho_{1,2} \cong \operatorname{th} z_{1,2} = \frac{\exp(2z_{1,2}) - 1}{\exp(2z_{1,2}) + 1},$$

где

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r} \mp \frac{\psi(P)}{\sqrt{n-3}};$$

r — выборочный коэффициент корреляции; n — объем выборки, а $\psi(P)$ — обратный интеграл вероятности, определяемый

из соотношения $P = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\psi(P)} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$

Для расчета $\psi(P)$ используется соотношение

$$\psi(P) \cong [-\ln(1-P)]^{0,6},$$

относительная погрешность которого при $0{,}81 \leqslant P \leqslant 0{,}999$ не превышает 3,5 %.

Программа V.7.1.2/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P 4 | 41 | 34 | 0 | 04 | 72 | ↑ | 06 |
| 01 | F 2 | 22 | 35 | , | 46 | 73 | F 4 | 42 |
| 02 | С/П | 78 | 40 | 6 | 64 | 74 | : | 36 |
| 03 | P 2 | 21 | 41 | ←→ | 16 | 75 | ↑ | 06 |
| 04 | ←→ | 16 | 42 | $x^y$ | 38 | 80 | В/О | 48 |
| 05 | ! | 14 | 43 | ↑ | 06 | | | |
| 10 | — | 86 | 44 | F 2 | 22 | | Инструкция | |
| 11 | 2 | 24 | 45 | : | 36 | | | |
| 12 | + | 96 | 50 | P $e^x$ | 33 | | В/О Р С/П г ↑ п С/П | |
| 13 | : | 36 | 51 | F $x^2$ | 55 | | | |
| 14 | P 3 | 31 | 52 | P 5 | 51 | | Результат | |
| 15 | F 2 | 22 | 53 | ПП | 68 | | | |
| 20 | 3 | 34 | 54 | P ВП | 63 | | $\rho_2$—в рег. X | |
| 21 | — | 86 | 55 | P 2 | 21 | | $\rho_1$—в рег. Y, 2 | |
| 22 | F $\sqrt{-}$ | 65 | 60 | F 5 | 52 | | | |
| 23 | P 2 | 21 | 61 | F 1/x | 45 | | Регистры | |
| 24 | F 4 | 42 | 62 | ↑ | 06 | | | |
| 25 | 1 | 14 | 63 | F 3 | 32 | | 2 $\rho_1$ | |
| 30 | ←→ | 16 | 64 | — | 86 | | 3 (r—1)/(r+1) | |
| 31 | — | 86 | 65 | P 4 | 41 | | 4—6 оперативные | |
| 32 | P 1n | 13 | 70 | F 3 | 32 | | | |
| 33 | /—/ | 56 | 71 | + | 96 | | | |

Время ввода Р — 1 с , время вычисления $\rho_1$, $\rho_2$ — 14 с.

Программа V.7.1.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | ←→ | 14 | 19 | 3 | 03 | 38 | F Вх | 0 |
| 01 | 1 | 01 | 20 | — | 11 | 39 | — | 11 |
| 02 | /—/ | 0L | 21 | F $\sqrt{-}$ | 21 | 40 | : | 13 |
| 03 | ПП | 53 | 22 | : | 13 | 41 | В/О | 52 |
| 04 | 34 | 34 | 23 | F $e^x$ | 16 | | | |
| 05 | x→П 1 | 41 | 24 | F $x^2$ | 22 | | Инструкция | |
| 06 | Сх | 0Г | 25 | В↑ | 0E | | | |
| 07 | F $e^x$ | 16 | 26 | ПП | 53 | | В/О г В↑ п С/П Р С/П | |
| 08 | С/П | 50 | 27 | 33 | 33 | | | |
| 09 | — | 11 | 28 | ←→ | 14 | | Результат | |
| 10 | F 1n | 18 | 29 | F 1/x | 23 | | | |
| 11 | /—/ | 0L | 30 | ПП | 53 | | $\rho_1$—в рег. X | |
| 12 | F 1n | 18 | 31 | 33 | 33 | | $\rho_2$—в рег. Y | |
| 13 | 0 | 00 | 32 | С/П | 50 | | | |
| 14 | . | 0— | 33 | П→x 1 | 61 | | Регистр | |
| 15 | 6 | 06 | 34 | + | 10 | | | |
| 16 | × | 12 | 35 | В↑ | 0E | | 1 (r—1)/(r+1) | |
| 17 | F $e^x$ | 16 | 36 | F Вх | 0 | | | |
| 18 | ←→ | 14 | 37 | — | 11 | | | |

Время ввода г, п — 7 с, время вычисления $\rho_1$, $\rho_2$ — 20 с.

*Пример.* Вычислить границы доверительного интервала $\rho$ при $r = 0{,}4$, $n = 20$, $P = 0{,}9$.

Ответ: $\rho_1 = 0{,}0236$, $\rho_2 = 0{,}6771$.

### V.7.1.3. РАНГОВАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ ПО СПИРМЕНУ

Если у n случайных элементов, каждый из которых обладает парой ранжируемых признаков, эти признаки расположить в порядке убывания так, что i-й элемент занимает $x_i$-е место по первому признаку и $y_i$-е место по второму признаку ($1 \leqslant x_i \leqslant n$; $1 \leqslant y_i \leqslant n$), то ранговая корреляция между этими признаками оценивается по формуле [14]:

$$R = 1 - \frac{6}{n(n^2-1)} \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2.$$

При независимости признаков R распределено асимптотически (при $n \to \infty$) нормально с центром в 0 и дисперсией $1/(n-1)$. При этом $\rho = 2 \sin \frac{\pi R}{6}$ является состоятельной оценкой корреляции между $x_i$ и $y_i$.

По приведенной программе вычисляются величина ранговой корреляции R и приближенно уровень значимости P независимости признаков. Для расчета P используется приближенное представление интеграла вероятностей $\Phi(x) \simeq \sqrt{1 - e^{-\frac{2}{\pi}x^2}}$.

При $n < 10$ для вычисления точного значения P следует пользоваться таблицами, например [20].

Программа V.7.1.3/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | — | 86 | 31 | × | 26 | 62 | ↑ | 06 |
| 01 | 0 | 04 | 32 | ←→ | 16 | 63 | F 6 | 62 |
| 02 | P 5 | 51 | 33 | — | 86 | 64 | × | 26 |
| 03 | P 6 | 61 | 34 | 6 | 64 | 65 | — | 86 |
| 04 | — | 86 | 35 | ←→ | 16 | 70 | P $e^x$ | 33 |
| 05 | F $x^2$ | 55 | 40 | : | 36 | 71 | 1 | 14 |
| 10 | ↑ | 06 | 41 | ↑ | 06 | 72 | ←→ | 16 |
| 11 | F 5 | 52 | 42 | F 5 | 52 | 73 | — | 86 |
| 12 | + | 96 | 43 | × | 26 | 74 | F $\sqrt{}$ | 65 |
| 13 | P 5 | 51 | 44 | /—/ | 56 | 75 | — | 86 |
| 14 | F 6 | 62 | 45 | 1 | 14 | 80 | P 6 | 61 |
| 15 | 1 | 14 | 50 | + | 96 | 81 | ↑ | 06 |
| 20 | + | 96 | 51 | P 5 | 51 | 82 | F 5 | 52 |
| 21 | P 6 | 61 | 52 | F $x^2$ | 55 | 83 | С/П | 78 |
| 22 | С/П | 78 | 53 | 2 | 24 | | | |
| 23 | БП | 58 | 54 | × | 26 | | Регистры | |
| 24 | F ↑ | 05 | 55 | ↑ | 06 | | | |
| 25 | ↑ | 06 | 60 | P π | 23 | 5 | R | |
| 30 | F $x^2$ | 55 | 61 | : | 36 | 6 | P | |

Программа V.7.1.3/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | — | 11 | 16 | × | 12 | 32 | П→x 6 | 66 |
| 01 | 0 | 00 | 17 | П→x 6 | 66 | 33 | — | 11 |
| 02 | x→П 6 | 46 | 18 | : | 13 | 34 | × | 12 |
| 03 | ←→ | 14 | 19 | П→x 6 | 66 | 35 | F $e^x$ | 16 |
| 04 | F Bx | 0 | 20 | F $x^2$ | 22 | 36 | — | 11 |
| 05 | 1 | 01 | 21 | 1 | 01 | 37 | F $\sqrt{}$ | 21 |
| 06 | F . | 25 | 22 | — | 11 | 38 | — | 11 |
| 07 | — | 11 | 23 | : | 13 | 39 | x→П 6 | 46 |
| 08 | F $x^2$ | 22 | 24 | — | 11 | 40 | П→x 5 | 65 |
| 09 | + | 10 | 25 | x→П 5 | 45 | 41 | С/П | 50 |
| 10 | К П→x 6 | Г6 | 26 | F $x^2$ | 22 | | | |
| 11 | F . | 25 | 27 | 2 | 02 | | Регистры | |
| 12 | С/П | 50 | 28 | × | 12 | | | |
| 13 | БП | 51 | 29 | F π | 20 | 5 | R | |
| 14 | 07 | 07 | 30 | : | 13 | 6 | P | |
| 15 | 6 | 06 | 31 | 1 | 01 | | | |

Для обеих программ используется единая инструкция.

Инструкция V.7.1.3/21,54,52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Перейти к началу программы | | В/О | |
| 2. Ввести очередную пару значений мест $x_1$, $y_1$ | $x_1$<br>$y_1$ | В↑<br>С/П | |
| 3. Если данные исчерпаны, далее, иначе — к п. 2 | | | |
| 4. Вычислить R, P: | | | |
| а) по программе V.7.1.3/21 | | БП × С/П | {R — в рег. X,5 |
| б) по программе V7.1.3/54,52 | | БП 15 С/П | {P — в рег. Y,6 |

Время ввода одной пары значений $x_1$, $y_1$ — T = 3 с, время вычисления R, P — T = 9 с.

*Пример.* Пусть значения мест $x_1$, $y_1$ пяти объектов заданы в виде таблицы

$x_1$ = 1 2 3 4 5

$y_1$ = 2 1 3 5 4

Вычислить R, P и проверить гипотезу о независимости признаков x, y при доверительном уровне значимости 0,1.

Решение. Ввести попарно значения мест $x_1$, $y_1$ согласно инструкции и выполнить команды БП × С/П для программы V.7.1.3/21 или БП 15 С/П для программы V.7.1.3/54, 52.

Ответ: R = 0,8, P = 0,1033.

Так как P > 0,1, то следует принять гипотезу о независимости признаков x и y.

## V.7.2. ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

Дисперсионный анализ предназначен для проверки несмещенности разных классов выборок, имеющих нормальное распределение с одинаковыми дисперсиями [14].

Рассмотрим случай одинакового количества n элементов каждого класса:

$$x_1', x_2', \ldots, x_n'; \; x_1'', x_2'', \ldots, x_n''; \ldots; \; x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \ldots, x_n^{(r)}.$$

Проверяется гипотеза равенства средних значений

$$\bar{x}' = \bar{x}'' = \ldots = \bar{x}^{(r)}.$$

Для этого вычисляется статистика $F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{(N-r)\,Q_1}{(r-1)\,Q_2}$,

где r — количество классов; $N = nr$ — полное количество элементов;

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} (x_j^{(i)} - M)^2, \quad Q_2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} (x_j^{(i)} - \bar{x}^{(i)})^2;$$

$M = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} \bar{x}^{(i)}$ — среднее значение по всем классам.

Истинные значения $\bar{x}^{(i)}$ (i = 1 — r) различны, если F существенно превышает единицу.

При больших значениях N — r, r > 30 статистика $\frac{1}{2} \ln F$ распределена асимптотически нормально со средним значением

$$\frac{N+1-2r}{2(N-r)(r-1)} \text{ и дисперсией } \frac{N-1}{2(N-r)(r-1)}.$$

По программе вычисляется значение F и приближенное значение уровня значимости P.

При малых значениях N — r, r для точного вычисления P можно пользоваться таблицами [14].

Программа V.7.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 0 | 40 | 10 | П→x 8 | 68 | 20 | x→П 3 | 43 |
| 01 | 0 | 00 | 11 | С/П | 50 | 21 | П→x 7 | 67 |
| 02 | x→П 2 | 42 | 12 | x→П 8 | 48 | 22 | П→x 8 | 68 |
| 03 | x→П 3 | 43 | 13 | П→x 2 | 62 | 23 | + | 10 |
| 04 | x→П 4 | 44 | 14 | + | 10 | 24 | x→П 7 | 47 |
| 05 | x→П 6 | 46 | 15 | x→П 2 | 42 | 25 | F L1 | 5L |
| 06 | П→x 0 | 60 | 16 | П→x 3 | 63 | 26 | 10 | 10 |
| 07 | x→П 1 | 41 | 17 | П→x 8 | 68 | 27 | F $x^2$ | 22 |
| 08 | 0 | 00 | 18 | F $x^2$ | 22 | 28 | П→x 6 | 66 |
| 09 | x→П 7 | 47 | 19 | + | 10 | 29 | + | 10 |

*Продолжение*

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 30 | x→П 6 | 46 | 54 | : | 13 | 78 | П→x 0 | 60 |
| 31 | П→x 4 | 64 | 55 | x→П 6 | 46 | 79 | × | 12 |
| 32 | x→П 5 | 45 | 56 | F ln | 18 | 80 | 1 | 01 |
| 33 | К П→x 4 | Г4 | 57 | П→x 0 | 60 | 81 | B ↑ | 0E |
| 34 | БП | 51 | 58 | 2 | 02 | 82 | F . | 25 |
| 35 | 06 | 06 | 59 | — | 11 | 83 | — | 11 |
| 36 | П→x 2 | 62 | 60 | П→x 4 | 64 | 84 | : | 13 |
| 37 | F $x^2$ | 22 | 61 | × | 12 | 85 | /—/ | 0L |
| 38 | П→x 4 | 64 | 62 | 1 | 01 | 86 | F $e^x$ | 16 |
| 39 | П→x 6 | 66 | 63 | + | 10 | 87 | — | 11 |
| 40 | × | 12 | 64 | П→x 3 | 63 | 88 | F $\sqrt{}$ | 21 |
| 41 | — | 11 | 65 | П→x 4 | 64 | 89 | — | 11 |
| 42 | П→x 6 | 66 | 66 | × | 12 | 90 | П→x 6 | 66 |
| 43 | П→x 3 | 63 | 67 | П→x 5 | 65 | 91 | С/П | 50 |
| 44 | П→x 0 | 60 | 68 | × | 12 | | | |
| 45 | × | 12 | 69 | B ↑ | 0E | | Регистры | |
| 46 | — | 11 | 70 | F . | 25 | | | |
| 47 | : | 13 | 71 | : | 13 | 0 | n | |
| 48 | П→x 0 | 60 | 72 | + | 10 | 1—3;8 | оперативные | |
| 49 | 1 | 01 | 73 | F $x^2$ | 22 | 4 | r | |
| 50 | — | 11 | 74 | × | 12 | 5 | r—1 | |
| 51 | x→П 3 | 43 | 75 | F π | 20 | 6 | F | |
| 52 | × | 12 | 76 | : | 13 | 7 | P | |
| 53 | П→x 5 | 65 | 77 | П→x 4 | 64 | | | |

Инструкция V.7.2/54,52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Ввести длину серий n | n | В/О С/П | |
| 2. Ввести поочередно элементы первого, второго и т. д. классов ($x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$, $x_3^{(1)}$, ..., $x_n^{(r)}$) | $x_j^{(i)}$ | С/П | $x_j^{(i)}$ |
| 3. Если данные исчерпаны, далее, иначе — к п. 2 | | | |
| 4. Вычислить F и P | | БП 36 С/П | F—в рег. X,6<br>P—в рег. Y,7 |

Время ввода одного значения $x_j^{(i)}$ — 5 с, время вычисления F, P — 25 с.

*Пример*. Вычислить значение F и проверить с 5 % доверительным уровнем гипотезу об одинаковых средних значениях для трех классов данных (r = 3) при n = 5, заданных в виде таблицы

$x' = 1\ 2\ 3\ 4\ 5$

$x'' = 2\ 1\ 3\ 5\ 3$

$x''' = 7\ 4\ 5\ 6\ 8$

Решение. Занести n = 5. Ввести последовательно значения $x_j^{(i)}$ (i = 1—3; j = 1 — 5) согласно инструкции. Выполнить команды БП 36 С/П

Ответ: F = 6,694, $\tilde{P}$ = 2,7 % < 5 %. (При использовании таблиц [14] с m = nr — r = 12 и m′ = r — 1 = 2 получаем P < 1%.) Гипотезу об одинаковых средних значениях элементов между классами следует отвергнуть.

### V.7.3. ДИСКРИМИНАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ

Заданы две выборки $(x'_A, y'_A)$, $(x''_A, y''_A)$, ..., $(x^n_A, y^n_A)$ и $(x'_B, y'_B)$, $(x''_B, y''_B)$..., $(x^n_B, y^n_B)$ одинакового объема n из двумерных нормальных генеральных совокупностей. Алгоритм Фишера (30) позволяет найти прямую $y + ax = x'_0$, разделяющую эти две совокупности. Расчетные формулы:

$$a = \frac{d_y S_{xx} - d_x S_{xy}}{d_x S_{yy} - d_y S_{xx}}, \quad \text{где } d_y = \bar{d}_A - \bar{d}_B,\ d_x = \bar{x}_A - \bar{x}_B,$$

$$x'_0 = \frac{S'_A \cdot x'_B - S'_B \cdot x'_A}{S'_A + S'_B},\ \bar{y}_A = \frac{1}{n}\Sigma y^A,\ \bar{y}_B = \frac{1}{n}\Sigma y^B,\ \bar{x}_A = \frac{1}{n}\Sigma x^A,$$

$$\bar{x}_B = \frac{1}{n}\Sigma x^B,$$

$$S_{xx} = \frac{S^A_{xx} + S^B_{xx}}{2},\ S^A_{xx} = \frac{1}{n-1}\left[\Sigma (x^A)^2 - \frac{(\Sigma x^A)^2}{n}\right],$$

$$S_{xy} = \frac{S^A_{xy} + S^B_{xy}}{2},\ S^A_{xy} = \frac{1}{n-1}\left[\Sigma x^A y^A - \frac{\Sigma x^A \cdot \Sigma y^A}{n}\right],$$

$$S_{yy} = \frac{S^A_{yy} + S^B_{yy}}{2},\ S^A_{yy} = \frac{1}{n-1}\left[\Sigma (y^A)^2 - \frac{(\Sigma y^A)^2}{n}\right],$$

$$\bar{x}'_A = \bar{x}_A + a\bar{y}_A, \qquad S^B_{xx} = \frac{1}{n-1}\left[\Sigma (x^B)^2 - \frac{(\Sigma x^B)^2}{n}\right],$$

$$\bar{x}'_B = \bar{x}_B + a\bar{y}_B,$$

$$S^B_{xy} = \frac{1}{n-1}\left[\Sigma x^B y^B - \frac{\Sigma x^B \cdot \Sigma y^B}{n}\right],$$

$$S'_A = \sqrt{S^A_{xx} + 2aS^A_{xy} + a^2 S^A_{yy}}, \qquad S^B_{yy} = \frac{1}{n-1}\left[\Sigma (y^B)^2 - \frac{(\Sigma y^B)^2}{n}\right],$$

$$S'_B = \sqrt{S^B_{xx} + 2aS^B_{xy} + a^2 S^B_{yy}}.$$

Вероятность неправильного отнесения нового наблюдения может быть вычислена по формуле

$$\alpha_A = \alpha_B = \Phi\left(-\frac{\bar{x}'_B - \bar{x}'_A}{S'_A + S'_B}\right),$$

где Ф — интеграл вероятности.

Программа V.7.3/54

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | С/П | 50 | 33 | F L0 | 5Г | 66 | П→х Д | 6Г |
| 01 | × | 12 | 34 | 28 | 28 | 67 | × | 12 |
| 02 | К ПП Д | −Г | 35 | П→х 9 | 69 | 68 | + | 10 |
| 03 | П→х С | 6С | 36 | П→х 3 | 63 | 69 | К х→П В ↑ | LE |
| 04 | х→П 0 | 40 | 37 | — | 11 | 70 | ←→ | 14 |
| 05 | С/П | 50 | 38 | П→х В | 6L | 71 | К П→х 0 | Г0 |
| 06 | ПП | 53 | 39 | П→х 5 | 65 | 72 | П→х Д | 6Г |
| 07 | 09 | 09 | 40 | — | 11 | 73 | F $x^2$ | 22 |
| 08 | ←→ | 14 | 41 | : | 13 | 74 | × | 12 |
| 09 | В ↑ | 0Е | 42 | х→П Д | 4Г | 75 | + | 10 |
| 10 | К ПП Д | −Г | 43 | П→х А | 6— | 76 | П→х Д | 6Г |
| 11 | В ↑ | 0Е | 44 | П→х 4 | 64 | 77 | 2 | 02 |
| 12 | F $x^2$ | 22 | 45 | + | 10 | 78 | × | 12 |
| 13 | К П→х 0 | Г0 | 46 | × | 12 | 79 | К П→х 0 | Г0 |
| 14 | + | 10 | 47 | П→х 7 | 67 | 80 | × | 12 |
| 15 | К х→П В ↑ | LE | 48 | П→х 1 | 61 | 81 | + | 10 |
| 16 | F . | 25 | 49 | + | 10 | 82 | К х→П В ↑ | LE |
| 17 | В/О | 52 | 50 | х→П 6 | 46 | 83 | F L0 | 5Г |
| 18 | К П→х 0 | Г0 | 51 | — | 11 | 84 | 62 | 62 |
| 19 | В ↑ | 0Е | 52 | П→х 8 | 68 | 85 | П→х 7 | 67 |
| 20 | F $x^2$ | 22 | 53 | П→х 2 | 62 | 86 | : | 13 |
| 21 | П→х С | 6С | 54 | + | 10 | 87 | F $\sqrt{-}$ | 21 |
| 22 | : | 13 | 55 | П→х 6 | 66 | 88 | х→П 8 | 48 |
| 23 | К П→х 0 | Г0 | 56 | П→х Д | 6Г | 89 | П→х 9 | 69 |
| 24 | — | 11 | 57 | × | 12 | 90 | × | 12 |
| 25 | К х→П В ↑ | LE | 58 | — | 11 | 91 | + | 10 |
| 26 | F . | 25 | 59 | : | 13 | 92 | П→х 8 | 68 |
| 27 | В/О | 52 | 60 | х→П Д | 4Г | 93 | 1 | 01 |
| 28 | К ПП Д | −Г | 61 | С/П | 50 | 94 | + | 10 |
| 29 | К ПП Д | −Г | 62 | К П→х 0 | Г0 | 95 | : | 13 |
| 30 | × | 12 | 63 | К П→х 0 | Г0 | 96 | П→х С | 6С |
| 31 | ПП | 53 | 64 | ←→ | 14 | 97 | : | 13 |
| 32 | 21 | 21 | 65 | К П→х 0 | Г0 | | | |

Регистры: 0 — С оперативные, Д а.

Программа V.7.3/52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | С/П | 50 | 10 | К ПП Д | −Г | 20 | F . | 25 |
| 01 | × | 12 | 11 | В ↑ | 0Е | 21 | К х→П Е | LE |
| 02 | К ПП Д | −Г | 12 | F $x^2$ | 22 | 22 | В/О | 52 |
| 03 | П→х С | 6С | 13 | К П→х 0 | Г0 | 23 | К П→х 0 | Г0 |
| 04 | х→П 0 | 40 | 14 | ПП | 53 | 24 | В ↑ | 0Е |
| 05 | С/П | 50 | 15 | 30 | 30 | 25 | F $x^2$ | 22 |
| 06 | ПП | 53 | 16 | В/О | 52 | 26 | П→х С | 6С |
| 07 | 09 | 09 | 17 | + | 10 | 27 | : | 13 |
| 08 | ←→ | 14 | 18 | П→х 0 | 60 | 28 | К П→х 0 | Г0 |
| 09 | В ↑ | 0Е | 19 | х→П Е | 4Е | 29 | /—/ | 0L |

*Продолжение*

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 30 | ПП | 53 | 55 | + | 10 | 80 | F $x^2$ | 22 |
| 31 | 17 | 17 | 56 | x→П 6 | 46 | 81 | × | 12 |
| 32 | F . | 25 | 57 | — | 11 | 82 | + | 10 |
| 33 | В/О | 52 | 58 | П→x 8 | 68 | 83 | П→x Д | 6Г |
| 34 | К ПП Д | −Г | 59 | П→x 2 | 62 | 84 | 2 | 02 |
| 35 | К ПП Д | −Г | 60 | + | 10 | 85 | × | 12 |
| 36 | × | 12 | 61 | П→x 6 | 66 | 86 | К П→x 0 | Г0 |
| 37 | ПП | 53 | 62 | П→x Д | 6Г | 87 | × | 12 |
| 38 | 26 | 26 | 63 | × | 12 | 88 | ПП | 53 |
| 39 | F L0 | 5Г | 64 | — | 11 | 89 | 17 | 17 |
| 40 | 34 | 34 | 65 | : | 13 | 90 | F L0 | 5Г |
| 41 | П→x 9 | 69 | 66 | x→П Д | 4Г | 91 | 68 | 68 |
| 42 | П→x 3 | 63 | 67 | С/П | 50 | 92 | П→x 7 | 67 |
| 43 | — | 11 | 68 | К П→x 0 | Г0 | 93 | : | 13 |
| 44 | П→x В | 6L | 69 | К П→x 0 | Г0 | 94 | F $\sqrt{-}$ | 21 |
| 45 | П→x 5 | 65 | 70 | ←→ | 14 | 95 | x→П 8 | 48 |
| 46 | — | 11 | 71 | К П→x 0 | Г0 | 96 | П→x 9 | 69 |
| 47 | : | 13 | 72 | П→x Д | 6Г | 97 | × | 12 |
| 48 | x→П Д | 4Г | 73 | × | 12 | 98 | + | 10 |
| 49 | П→x А | 6— | 74 | + | 10 | 99 | П→x 8 | 68 |
| 50 | П→x 4 | 64 | 75 | ПП | 53 | 100 | 1 | 01 |
| 51 | + | 10 | 76 | 18 | 18 | 101 | + | 10 |
| 52 | × | 12 | 77 | ←→ | 14 | 102 | : | 13 |
| 53 | П→x 7 | 67 | 78 | К П→x 0 | Г0 | 103 | П→x С | 6С |
| 54 | П→x 1 | 61 | 79 | П→x Д | 6Г | 104 | : | 13 |

Регистры: 0 — С, Е оперативные, Д а.

Для обеих программ используется единая инструкция.

Инструкция V.7.3/54,52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Очистить регистры | Сх | x→П 1 x→П 2<br>x→П 3 x→П 4 x→П 5<br>x→П 6 x→П 7 x→П 8<br>x→П 9 x→П А x→П В | |
| 2. Подготовить программу к вводу первой выборки | 13<br>6 | x→П Д<br>x→П С<br>БП 03 С/П | 6 |
| 3. Ввести очередную пару значений первой выборки | $x_i^A$ | В↑ | |
| | $y_i^A$ | С/П | 6 |
| 4. Если ввод первой выборки окончен, далее, нет — к п. 3 | | | |
| 5. Подготовить программу к вводу второй выборки | 12 | x→П С<br>БП 03 С/П | 12 |

*Продолжение*

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 6. Ввести очередную пару значений второй выборки | $x_i^B$ | В ↑ | |
| | $y_i^B$ | С/П | 12 |
| 7. Если ввод второй выборки окончен, далее, нет—к п. 6 | | | |
| 8. Ввести количество точек в выборке | n | x→П С | |
| 9. Вычислить a: | | | |
| а) для программы V.7.3/54 | 18 | x→П Д БП 28 С/П | a—в рег. X,Д |
| б) для программы V.7.3/52 | 23 | x→П Д БП 34 С/П | |
| 10. Вычислить $x_0'$ | 12 | x→П 0 С/П | $x_0'$—в рег. X |

Время ввода пары чисел — 12 с, вычисления a — 29 с, вычисления $x_0'$ — 20 с.

*Пример.*

| $x^A$ | $y^A$ | $x^B$ | $y^B$ | Ответ |
|---|---|---|---|---|
| | | | | a = 2 |
| —5 | 7 | —1 | 9 | |
| —2 | 1 | 2 | 3 | $x_0' = 2$ |
| —3 | —2 | 5 | 2 | |
| —3 | —7 | | —1 | |

### V.7.4. МЕТОД КОНКОРДАЦИИ

Пусть m специалистам требуется расположить k факторов исследуемого явления в порядке их значимости, т. е. проранжировать их, присвоив каждому фактору соответствующий порядковый номер (ранг) $a_{ij}$ (i = 1,2, ..., k; j = 1, 2, ..., m; $1 \leqslant a_{ij} \leqslant k$), соответствующий занимаемому месту в ранжированном ряду.

Принимать обоснованное решение об относительной значимости факторов можно только в случае согласованности мнений всех специалистов.

Для оценки согласованности мнений результаты ранжирования обрабатываются следующим образом [26]. Подсчитывается разность между суммой рангов каждого фактора и средней суммой рангов

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} - \frac{m(k+1)}{2}$$

и вычисляется величина $S = \sum_{i=1}^{k} \Delta_i^2$.

Коэффициент конкордации вычисляется по формуле

$$W = \frac{12 \cdot S}{m^2 (k^3 - k)} .$$

Величина W лежит в пределах 0 — 1, причем W = 0 означает отсутствие какого-либо согласия в мнениях специалистов, W = 1 — полное согласие. Для проверки значимости W используется величина $\chi_p^2 = W \cdot m\ (k - 1)$, имеющая $\chi^2$ распределение с (k — 1) степенью свободы.

Приводится программа вычисления значений $W$ и $\chi_p^2$. Уровень значимости проверяется по вычисленному значению $\chi_p^2$ с (k — 1) степенью свободы с использованием таблиц $\chi^2$, например [14, 20].

Программа V.7.4/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P 3 | 31 | 34 | ←→ | 16 | 72 | — | 86 |
| 01 | Cx | 76 | 35 | F $x^2$ | 55 | 73 | P 4 | 41 |
| 02 | P , | 43 | 40 | ↑ | 06 | 74 | F 2 | 22 |
| 03 | ←→ | 16 | 41 | P , | 43 | 75 | : | 36 |
| 04 | P 4 | 41 | 42 | + | 96 | 80 | F 1/x | 45 |
| 05 | 1 | 14 | 43 | ↑ | 06 | 81 | ←→ | 16 |
| 10 | — | 86 | 44 | P , | 43 | 82 | — | 86 |
| 11 | P /—/ | 53 | 45 | P x=0 | 59 | 83 | 3 | 34 |
| 12 | P /—/ | 53 | 50 | ↑ | 06 | 84 | × | 26 |
| 13 | P /—/ | 53 | 51 | F 3 | 32 | 85 | ↑ | 06 |
| 14 | 0 | 04 | 52 | F $x^2$ | 55 | 90 | F 3 | 32 |
| 15 | P , | 43 | 53 | : | 36 | 91 | × | 26 |
| 20 | F 3 | 32 | 54 | 4 | 44 | 92 | P 2 | 21 |
| 21 | 1 | 14 | 55 | × | 26 | 93 | F 4 | 42 |
| 22 | — | 86 | 60 | ↑ | 06 | 94 | : | 36 |
| 23 | P /—/ | 53 | 61 | F 4 | 42 | 95 | C/П | 78 |
| 24 | C/П | 78 | 62 | : | 36 | | | |
| 25 | + | 96 | 63 | P 2 | 21 | | Регистры | |
| 30 | ↑ | 06 | 64 | F 4 | 42 | | | |
| 31 | P , | 43 | 65 | 1 | 14 | 2 | $\chi^2$ | |
| 32 | P x=0 | 59 | 70 | + | 96 | 3 | m | |
| 33 | F 2 | 22 | 71 | 2 | 24 | 4 | оперативный | |

Программа V.7.4/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 1 | 41 | 06 | x→П 2 | 42 | 12 | F $x^2$ | 22 |
| 01 | ←→ | 14 | 07 | Cx | 0Г | 13 | + | 10 |
| 02 | x→П 0 | 40 | 08 | C/П | 50 | 14 | F L3 | 5— |
| 03 | x→П 3 | 43 | 09 | + | 10 | 15 | 05 | 05 |
| 04 | 0 | 00 | 10 | F L2 | 58 | 16 | 4 | 04 |
| 05 | П→x 1 | 61 | 11 | 08 | 08 | 17 | × | 12 |

*Продолжение*

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 18 | П→х 0 | 60 | 27 | — | 11 | 36 | : | 13 |
| 19 | : | 13 | 28 | 3 | 03 | 37 | С/П | 50 |
| 20 | П→х 0 | 60 | 29 | × | 12 | | | |
| 21 | 1 | 01 | 30 | х→П 2 | 42 | | Регистры | |
| 22 | + | 10 | 31 | П→х 1 | 61 | | | |
| 23 | П→х 1 | 61 | 32 | : | 13 | 0 | k | |
| 24 | × | 12 | 33 | П→х 0 | 60 | 1 | m | |
| 25 | : | 13 | 34 | 1 | 01 | 2 | $\chi^2$ | |
| 26 | F Bx | 0 | 35 | — | 11 | 3 | оперативный | |

Для обеих программ используется единая инструкция.

Инструкция V.7.4/21,54,52

| Содержание | Набрать число | Выполнить команды | Результат |
|---|---|---|---|
| 1. Ввести значения k и m | k<br>m | В↑<br>В/О С/П | k |
| 2. Ввести значения $a_{ij}$ построчно ($a_{11}$, $a_{12}$, ..., $a_{km}$) | $a_{ij}$ | С/П | |
| 3. Если данные не исчерпаны — к п. 2, иначе — читать результат | | | W — в рег. X<br>$\chi^2$ — в рег. 2 |

Время ввода одного значения $a_{ij}$ — 1 — 3 с, время вычисления W, $\chi^2$ — 10—15 с.

*Пример.* Три специалиста (m = 3) проранжировали 4 фактора (k = 4), в результате чего получена следующая таблица значений $a_{ij}$:

| i \ j | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 3 | 2 |
| 2 | 2 | 4 | 1 |
| 3 | 4 | 2 | 3 |
| 4 | 3 | 1 | 4 |

Вычислить коэффициент конкордации W и уровень значимости P согласованности мнений специалистов.

Решение. Ввести k = 4 и m = 3. Ввести значения $a_{ij}$ из приведенной таблицы по строкам (1 3 2 2 4 1 4 2 3 3 1 4). В результате получаем W = 0,111, $\chi^2$ = 1.

По таблицам [14] находим P ≃ 0,4.

# Глава VI

# СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

## VI.1. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ОБЩЕГО НАЗНАЧЕНИЯ

### VI.1.1. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

#### VI.1.1.1. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

Интегральная показательная функция Ei (x) определяется как

$$\mathrm{Ei}\,(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\,dt.$$

Для расчета используется представление $\widetilde{\mathrm{Ei}}$ (x) в виде [13]

$$\widetilde{\mathrm{Ei}}\,(x) = C + \ln|x| + \sum_{i=1}^{N} \frac{x^i}{i \cdot i!},$$

где C = 0,5772157 — постоянная Эйлера.

**VI.1.1.1.1.** Вычисление $\widetilde{\mathrm{Ei}}$ (x) при заданном N = int (9 + 2 |x|)

Программа VI.1.1.1.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | В↑ | 0E | 11 | + | 10 | 22 | С/П | 50 |
| 01 | F $x^2$ | 22 | 12 | F Bx | 0 | | | |
| 02 | F $\sqrt{}$ | 21 | 13 | × | 12 | | Инструкция | |
| 03 | В↑ | 0E | 14 | × | 12 | | | |
| 04 | x→П 1 | 41 | 15 | F L2 | 58 | | 0,5772157 x→П 3 | |
| 05 | 9 | 09 | 16 | 09 | 09 | | x В/О С/П | |
| 06 | + | 10 | 17 | П→x 1 | 61 | | | |
| 07 | + | 10 | 18 | F ln | 18 | | Регистры | |
| 08 | x→П 2 | 42 | 19 | + | 10 | 1 | \|x\| | |
| 09 | П→x 2 | 62 | 20 | П→x 3 | 63 | 2 | оперативный | |
| 10 | F 1/x | 23 | 21 | + | 10 | 3 | 0,5772157 | |

Время вычисления — T = 5 (|x| + 4) с.

Относительная погрешность $\delta$ при $-1{,}6 \leqslant x \leqslant 10$ ($x \neq 0$) не превышает $1{,}4 \cdot 10^{-4}$.

*Пример*. x = 4. $\widetilde{\mathrm{Ei}}$ (4) = 19,631695; точное значение Ei (4) = = 19,63087.

**VI.1.1.1.2.** Вычисление $\widetilde{\mathrm{Ei}}$ (x) с остановом по машинному нулю

Программа VI.1.1.1.2/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P 3 | 31 | 25 | ↑ | 06 | 54 | P 2 | 21 |
| 01 | F $x^2$ | 55 | 30 | F 3 | 32 | 55 | ←→ | 16 |
| 02 | F $\sqrt{}$ | 65 | 31 | × | 26 | 60 | С/П | 78 |
| 03 | P ln | 13 | 32 | ↑ | 06 | | | |
| 04 | ↑ | 06 | 33 | F 6 | 62 | | Инструкция | |
| 05 | F 2 | 22 | 34 | × | 26 | | | |
| 10 | + | 96 | 35 | P 6 | 61 | | 0,5772157 P 2 | |
| 11 | P 4 | 41 | 40 | ↑ | 06 | | x В/О С/П | |
| 12 | 1 | 14 | 41 | F 5 | 52 | | | |
| 13 | P 6 | 61 | 42 | : | 36 | | Регистры | |
| 14 | 0 | 04 | 43 | ↑ | 06 | | | |
| 15 | P 5 | 51 | 44 | F 4 | 42 | 2 | 0,5772157 | |
| 20 | F 5 | 52 | 45 | ←→ | 16 | 3 | x | |
| 21 | 1 | 14 | 50 | + | 96 | 4 | Ei | |
| 22 | + | 96 | 51 | P 4 | 41 | 5;6 | оперативные | |
| 23 | P 5 | 51 | 52 | — | 86 | | | |
| 24 | F 1/x | 45 | 53 | P x=0 | 59 | | | |

Время вычисления — T = 9 (|x| + 4) с.

Программа VI.1.1.1.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 1 | 41 | 14 | П→x 1 | 61 | 28 | F Bx | 0 |
| 01 | F $x^2$ | 22 | 15 | × | 12 | 29 | С/П | 50 |
| 02 | F $\sqrt{}^-$ | 21 | 16 | П→x 2 | 62 | | | |
| 03 | F ln | 18 | 17 | 1 | 01 | | Инструкция | |
| 04 | П→x 0 | 60 | 18 | + | 10 | | | |
| 05 | + | 10 | 19 | x→П 2 | 42 | | 0,5772157 x→П 0 | |
| 06 | 1 | 01 | 20 | : | 13 | | x В/О С/П | |
| 07 | x→П 3 | 43 | 21 | x→П 3 | 43 | | | |
| 08 | Cx | 0Г | 22 | П→x 2 | 62 | | Регистры | |
| 09 | x→П 2 | 42 | 23 | : | 13 | | | |
| 10 | + | 10 | 24 | + | 10 | 0 | 0,5772157 | |
| 11 | F . | 25 | 25 | — | 11 | 1 | x | |
| 12 | F Bx | 0 | 26 | F x=0 | 5E | 2;3 | оперативные | |
| 13 | П→x 3 | 63 | 27 | 12 | 12 | | | |

Время вычисления — T = 10 (|x| + 5) с.

Относительная погрешность вычисления $\delta$ составляет:

$$\delta \leqslant 1 \cdot 10^{-4} \text{ при } -4 \leqslant x < 0, \quad \delta \leqslant 5 \cdot 10^{-7} \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant 20.$$

*Пример.* x = — 4. $\widetilde{\text{Ei}}$ (— 4) = —0,00377907; точное значение Ei (— 4) = — 0,00377935.

### VI.1.1.2. ИНТЕГРАЛЬНЫЙ СИНУС

Интегральный синус Si(x) определяется формулой

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

Для расчета приближенного значения $\widetilde{\text{Si}}$ (x) используется представление в виде ряда [14]

$$\text{Si}(x) = x \sum_{i=1}^{N} \frac{(-x^2)^i}{(2i+1)(2i+1)!}.$$

**VI.1.1.2.1.** Вычисление $\widetilde{\text{Si}}$ (x) при заданном N = int (x + $\pi$)

Программа VI.1.1.2.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | В↑ | 0E | 11 | F Bx | 0 |
| 01 | F π | 20 | 12 | — | 11 |
| 02 | + | 10 | 13 | F 1/x | 23 |
| 03 | x→П 2 | 42 | 14 | + | 10 |
| 04 | 0 | 00 | 15 | F Bx | 0 |
| 05 | × | 12 | 16 | × | 12 |
| 06 | П→x 2 | 62 | 17 | × | 12 |
| 07 | В↑ | 0E | 18 | F L2 | 58 |
| 08 | + | 10 | 19 | 05 | 05 |
| 09 | : | 13 | 20 | С/П | 50 |
| 10 | 1 | 01 | | | |

Инструкция
x В/О С/П
Регистр
2 счетчик

Время вычисления — T = 4 (x + 5) с.

Относительная погрешность вычисления $\delta$ при 0 < x ⩽ 7 не превышает $4 \cdot 10^{-4}$.

*Пример.* x = 2. $\widetilde{\text{Si}}$ (2) = 1,6054082; точное значение Si (2) = = 1,6054130.

## VI.1.1.2.2. Вычисление $\widetilde{Si}$ (x) с остановом по машинному нулю

Программа VI.1.1.2.2/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P 5 | 51 | 30 | × | 26 | 60 | ←→ | 16 |
| 01 | 0 | 04 | 31 | P , | 43 | 61 | + | 96 |
| 02 | P 4 | 41 | 32 | F 3 | 32 | 62 | P 4 | 41 |
| 03 | 1 | 14 | 33 | 2 | 24 | 63 | — | 86 |
| 04 | P 3 | 31 | 34 | — | 86 | 64 | P x=0 | 59 |
| 05 | Б П | 58 | 35 | P 3 | 31 | 65 | F 1 | 12 |
| 10 | F 3 | 32 | 40 | ↑ | 06 | 70 | + | 96 |
| 11 | F 3 | 32 | 41 | P /—/ | 53 | 71 | С/П | 78 |
| 12 | 1 | 14 | 42 | ←→ | 16 | | | |
| 13 | — | 86 | 43 | : | 36 | | Инструкция | |
| 14 | /—/ | 56 | 44 | ↑ | 06 | | | |
| 15 | ↑ | 06 | 45 | P , | 43 | | x В/О С/П | |
| 20 | P /—/ | 53 | 50 | : | 36 | | | |
| 21 | ←→ | 16 | 51 | ↑ | 06 | | Регистры | |
| 22 | : | 36 | 52 | F 5 | 52 | | | |
| 23 | ↑ | 06 | 53 | × | 26 | 3 | оперативный | |
| 24 | F 5 | 52 | 54 | ↑ | 06 | 4 | $\widetilde{Si}$ (x) | |
| 25 | F $x^2$ | 55 | 55 | F 4 | 42 | 5 | x | |

Время вычисления — $T = 8\,(x + 4)$ с.

Программа VI.1.1.2.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 1 | 41 | 14 | : | 13 | 28 | 06 | 06 |
| 01 | Cx | 0Г | 15 | П→x 3 | 63 | 29 | + | 10 |
| 02 | 1 | 01 | 16 | 2 | 02 | 30 | С/П | 50 |
| 03 | x→П 3 | 43 | 17 | — | 11 | | | |
| 04 | БП | 51 | 18 | x→П 3 | 43 | | | |
| 05 | 15 | 15 | 19 | : | 13 | | Инструкция | |
| 06 | F Bx | 0 | 20 | x→П 2 | 42 | | | |
| 07 | П→x 2 | 62 | 21 | П→x 3 | 63 | | x В/О С/П | |
| 08 | П→x 1 | 61 | 22 | : | 13 | | | |
| 09 | F $x^2$ | 22 | 23 | П→x 1 | 61 | | Регистры | |
| 10 | × | 12 | 24 | × | 12 | | | |
| 11 | 1 | 01 | 25 | + | 10 | 1 | x | |
| 12 | П→x 3 | 63 | 26 | — | 11 | 2;3 | оперативные | |
| 13 | — | 11 | 27 | F x=0 | 5E | | | |

Время вычисления — $T = 10\,(x + 4)$ с.

Относительная погрешность вычисления $\delta$ при $0 < x \leqslant 10$ не превышает $1 \cdot 10^{-6}$

*Пример.* x = 2. $\widetilde{Si}$ (2) = 1,605413.

## VI.1.1.3. ИНТЕГРАЛЬНЫЙ КОСИНУС

Интегральный косинус Ci(x) определяется как

$$\mathrm{Ci}(x) = -\int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt \quad (x > 0).$$

Для расчета приближенного значения $\widetilde{\mathrm{Ci}}$ (x) используется представление в виде ряда [14]

$$\mathrm{Ci}(x) = C + \ln x + \sum_{i=1}^{N} \frac{(-x^2)^i}{2i\,(2i)!},$$

где C = 0,5772157 — постоянная Эйлера.

**VI.1.1.3.1.** Вычисление Ci (x) при заданном N = int (8 + x)

Программа VI.1.1.3.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 1 | 41 | 13 | : | 13 | 26 | + | 10 |
| 01 | 2 | 02 | 14 | П→x 2 | 62 | 27 | С/П | 50 |
| 02 | : | 13 | 15 | F 1/x | 23 | | | |
| 03 | F x² | 22 | 16 | + | 10 | | Инструкция | |
| 04 | /—/ | 0L | 17 | F Bx | 0 | | | |
| 05 | П→x 1 | 61 | 18 | × | 12 | | 0,5772157 x→П 3 | |
| 06 | 8 | 08 | 19 | × | 12 | | x B/O С/П | |
| 07 | + | 10 | 20 | F L2 | 58 | | | |
| 08 | x→П 2 | 42 | 21 | 09 | 09 | | Регистры | |
| 09 | П→x 2 | 62 | 22 | П→x 1 | 61 | | | |
| 10 | 2 | 02 | 23 | F ln | 18 | 1 | x | |
| 11 | F 1/x | 23 | 24 | + | 10 | 2 | оперативный | |
| 12 | + | 10 | 25 | П→x 3 | 63 | 3 | 0,5772157 | |

Время вычисления — T = 4 (x + 10) с.

Абсолютная погрешность вычисления Δ при $0{,}01 \leqslant x \leqslant 10$ не превышает $2 \cdot 10^{-5}$.

*Пример.* x = 2. $\widetilde{\mathrm{Ci}}$ (2) = 0,422981; точное значение Ci (2) = = 0,4229808.

**VI.1.1.3.2.** Вычисление $\widetilde{\mathrm{Ci}}$ (x) с остановом по машинному нулю

Программа VI.1.1.3.2/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P 4 | 41 | 10 | 0 | 04 | 20 | + | 96 |
| 01 | P ln | 13 | 11 | P 5 | 51 | 21 | P 5 | 51 |
| 02 | ↑ | 06 | 12 | 1 | 14 | 22 | 1 | 14 |
| 03 | F 2 | 22 | 13 | P 6 | 61 | 23 | — | 86 |
| 04 | + | 96 | 14 | F 5 | 52 | 24 | × | 26 |
| 05 | P 3 | 31 | 15 | 2 | 24 | 25 | ↑ | 06 |

*Продолжение*

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 30 | F 4 | 42 | 45 | : | 36 |
| 31 | F $x^2$ | 55 | 50 | ↑ | 06 |
| 32 | /—/ | 56 | 51 | F 3 | 32 |
| 33 | ←→ | 16 | 52 | ←→ | 16 |
| 34 | : | 36 | 53 | + | 96 |
| 35 | ↑ | 06 | 54 | P 3 | 31 |
| 40 | F 6 | 62 | 55 | — | 86 |
| 41 | × | 26 | 60 | P x=0 | 59 |
| 42 | P 6 | 61 | 61 | F ←→ | 15 |
| 43 | ↑ | 06 | 62 | + | 96 |
| 44 | F 5 | 52 | 63 | С/П | 78 |

Инструкция

0,5772157 Р2
x В/О С/П

Регистры

2 0,5772157
3 $C_1$
4—6 оперативные

Время вычисления — T = (9x + 20) с.

Программа VI.1.1.3.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 2 | 42 | 15 | 1 | 01 | 30 | 10 | 10 |
| 01 | F ln | 18 | 16 | П→x 3 | 63 | 31 | F Bx | 0 |
| 02 | П→x 1 | 61 | 17 | — | 11 | 32 | С/П | 50 |
| 03 | + | 10 | 18 | : | 13 | | | |
| 04 | 1 | 01 | 19 | П→x 3 | 63 | | | |
| 05 | x→П 4 | 44 | 20 | 2 | 02 | | | |
| 06 | Cx | 0Г | 21 | — | 11 | | | |
| 07 | x→П 3 | 43 | 22 | x→П 3 | 43 | | | |
| 08 | ←→ | 14 | 23 | : | 13 | | | |
| 09 | + | 10 | 24 | x→П 4 | 44 | | | |
| 10 | F Bx | 0 | 25 | П→x 3 | 63 | | | |
| 11 | П→x 4 | 64 | 26 | : | 13 | | | |
| 12 | П→x 2 | 62 | 27 | — | 11 | | | |
| 13 | F $x^2$ | 22 | 28 | — | 11 | | | |
| 14 | × | 12 | 29 | F x=0 | 5E | | | |

Инструкция

0,5772157 x→П 1
x В/О С/П

Регистры

1 0,5772157
2 x
3;4 оперативные

Время вычисления — T = (11x + 30) с.

Абсолютная погрешность вычисления Δ при $0{,}01 \leqslant x < 10$ не превышает $1 \cdot 10^{-6}$.

*Пример.* x = 2. $\widetilde{\mathrm{Ci}}$ (2) = 0,422981.

### VI.1.1.4. ИНТЕГРАЛЫ ФРЕНЕЛЯ

Интегралы Френеля S (x) и C (x) определяются как

$$S(x) = \int_0^x \sin(\pi \cdot t^2/2)\, dt,$$

$$C(x) = \int_0^x \cos(\pi t^2/2)\, dt. \qquad x \geqslant 0$$

### VI.1.1.4.1. Вычисление S(x) и C(x) при $x \leqslant 3$

Приближенные значения $\widetilde{S}(x)$ и $\widetilde{C}(x)$ вычисляются с помощью представления в виде рядов [11]

$$\widetilde{S}(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^{4k+3} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k+1}}{(2k+1)! \cdot (4k+3)},$$

$$\widetilde{C}(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^{4k+1} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k}}{(2k)! \cdot (4k+1)}.$$

Приведены две программы вычисления $\widetilde{S}(x)$ и $\widetilde{C}(x)$.

По программе VI.1.1.4.1.1/21 в зависимости от предварительной установки значений + 1 или 0 в регистре памяти 2 вычисляется соответственно либо $\widetilde{S}(x)$, либо $\widetilde{C}(x)$.

Программа VI.1.1.4.1.1/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P 3 | 31 | 40 | P 6 | 61 | 80 | F 3 | 32 |
| 01 | P 5 | 51 | 41 | 1 | 14 | 81 | ←→ | 16 |
| 02 | F $x^2$ | 55 | 42 | — | 86 | 82 | + | 96 |
| 03 | ↑ | 06 | 43 | × | 26 | 83 | P 3 | 31 |
| 04 | P π | 23 | 44 | ↑ | 06 | 84 | — | 86 |
| 05 | × | 26 | 45 | F 4 | 42 | 85 | P x=0 | 59 |
| 10 | 2 | 24 | 50 | F $x^2$ | 55 | 90 | 3 | 34 |
| 11 | : | 36 | 51 | /—/ | 56 | 91 | + | 96 |
| 12 | P 4 | 41 | 52 | ←→ | 16 | 92 | С/П | 78 |
| 13 | F 2 | 22 | 53 | : | 36 | | | |
| 14 | P 6 | 61 | 54 | ↑ | 06 | | | |
| 15 | P x≠0 | 79 | 55 | F 5 | 52 | | | |
| 20 | 3 | 34 | 60 | × | 26 | | | |
| 21 | F 3 | 32 | 61 | P 5 | 51 | | | |
| 22 | ↑ | 06 | 62 | F 6 | 62 | | | |
| 23 | F 4 | 42 | 63 | 2 | 24 | | | |
| 24 | × | 26 | 64 | × | 26 | | | |
| 25 | P 5 | 51 | 65 | 1 | 14 | | | |
| 30 | 3 | 34 | 70 | + | 96 | | | |
| 31 | : | 36 | 71 | ↑ | 06 | | | |
| 32 | P 3 | 31 | 72 | F 5 | 52 | | | |
| 33 | F 6 | 62 | 73 | ←→ | 16 | | | |
| 34 | 2 | 24 | 74 | : | 36 | | | |
| 35 | + | 96 | 75 | ↑ | 06 | | | |

Инструкция

в рег. 2 { 1 для S; 0 для C

x В/О С/П

Регистры

2 — 1 или 0

3 — S или C

4 — $x^2 \cdot \frac{\pi}{2}$

5;6 — оперативные

Относительная погрешность вычисления $\delta$ при $x \leqslant 2{,}5$ не превышает $1 \cdot 10^{-4}$.

Время вычисления — 0,5 — 2 мин.

По программе VI.1.1.4.1.1/54,52 в зависимости от предварительной установки значения $\mp 1$ в регистре памяти С вычисляется либо $\widetilde{S}(x)$ (— 1 в регистре С), либо $\widetilde{C}(x)$ (+ 1 в регистре С).

Программа VI.1.1.4.1.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 2 | 42 | 19 | × | 12 | 38 | F $e^x$ | 16 |
| 01 | F $x^2$ | 22 | 20 | П→x 3 | 63 | 39 | F $\sqrt{}$ | 21 |
| 02 | F π | 20 | 21 | 4 | 04 | 40 | × | 12 |
| 03 | × | 12 | 22 | × | 12 | 41 | П→x 2 | 62 |
| 04 | 2 | 02 | 23 | 2 | 02 | 42 | × | 12 |
| 05 | : | 13 | 24 | — | 11 | 43 | С/П | 50 |
| 06 | F $x^2$ | 22 | 25 | П→x C | 6C | | | |
| 07 | F Bx | 0 | 26 | — | 11 | | Инструкция | |
| 08 | 9 | 09 | 27 | F 1/x | 23 | | | |
| 09 | + | 10 | 28 | + | 10 | | | |
| 10 | x→П 3 | 43 | 29 | F L3 | 5— | В рег. С | { —1 для S<br>+1 для С | |
| 11 | П→x 3 | 63 | 30 | 11 | 11 | | x В/О С/П | |
| 12 | В↑ | 0E | 31 | ←→ | 14 | | | |
| 13 | + | 10 | 32 | F $\sqrt{}$ | 21 | | Регистры | |
| 14 | : | 13 | 33 | F ln | 18 | | | |
| 15 | П→x C | 6C | 34 | 1 | 01 | 2 | x | |
| 16 | F Bx | 0 | 35 | П→x C | 6C | 3 | оперативный | |
| 17 | — | 11 | 36 | — | 11 | C | —1 или 1 | |
| 18 | : | 13 | 37 | × | 12 | | | |

Время вычисления — $T = 10(5x + 1)$ с.

Относительная погрешность вычисления $\delta$ при $x \leqslant 2{,}5$ превышает $1 \cdot 10^{-4}$.

*Пример.* $x = 2$. $\widetilde{S}(2) = 0{,}343416$, $\widetilde{C}(2) = 0{,}48825$; точные значения $S(2) = 0{,}3434157$, $C(2) = 0{,}4882534$.

**VI.1.1.4.1.2.** По программе одновременно вычисляются значения $\widetilde{S}(x)$ и $\widetilde{C}(x)$

Программа VI.1.1.4.1.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 1 | 41 | 08 | ПП | 53 | 16 | + | 10 |
| 01 | x→П 2 | 42 | 09 | 25 | 25 | 17 | x→П 2 | 42 |
| 02 | x→П 4 | 44 | 10 | + | 10 | 18 | F Bx | 0 |
| 03 | 0 | 00 | 11 | П→x 4 | 64 | 19 | — | 11 |
| 04 | В↑ | 0E | 12 | /—/ | 0L | 20 | F x=0 | 5E |
| 05 | x→П 3 | 43 | 13 | ПП | 53 | 21 | 06 | 06 |
| 06 | ←→ | 14 | 14 | 25 | 25 | 22 | + | 10 |
| 07 | П→x 4 | 64 | 15 | П→x 2 | 62 | 23 | П→x 2 | 62 |

*Продолжение*

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 24 | С/П | 50 | 35 | F $x^2$ | 22 |
| 25 | П→x 3 | 63 | 36 | × | 12 |
| 26 | 1 | 01 | 37 | x→П 4 | 44 |
| 27 | + | 10 | 38 | П→x 3 | 63 |
| 28 | x→П 3 | 43 | 39 | 2 | 02 |
| 29 | : | 13 | 40 | × | 12 |
| 30 | F π | 20 | 41 | 1 | 01 |
| 31 | × | 12 | 42 | + | 10 |
| 32 | 2 | 02 | 43 | : | 13 |
| 33 | : | 13 | 44 | В/О | 52 |
| 34 | П→x 1 | 61 | | | |

Инструкция

x В/О С/П

Результат

C (x) — в рег. X,2

S (x) — в рег. Y

Регистры

1 x

2 C (x)

3;4 оперативные

Относительная погрешность вычисления $\delta$ не превышает $2 \cdot 10^{-6}$.

*Пример.* x = 2. $\widetilde{S}$ (2) = 0,34341618, $\widetilde{C}$ (2) = 0,48825281.

Время вычисления примера — 4 мин.

**VI.1.1.4.2.** Вычисление значений $\widetilde{S}$ (x) и $\widetilde{C}$ (x) при $x \geqslant 3$

Приближенные значения $\widetilde{S}$ (x) и $\widetilde{C}$ (x) при $x \geqslant 3$ представляются в виде [11]:

$$\widetilde{S}(x) = \frac{1}{2} - \frac{\cos\frac{\pi x^2}{2}}{\pi x}\left[1 - \frac{3}{(\pi x^2)^2}\right] - \frac{\sin\frac{\pi x^2}{2}}{\pi^2 x^3}\left[1 - \frac{15}{(\pi x^2)^2}\right],$$

$$\widetilde{C}(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sin\frac{\pi x^2}{2}}{\pi x}\left[1 - \frac{3}{(\pi x^2)^2}\right] - \frac{\cos\frac{\pi x^2}{2}}{\pi^2 x^3}\left[1 - \frac{15}{(\pi x^2)^2}\right].$$

По программе одновременно вычисляются $\widetilde{S}$ (x) и $\widetilde{C}$ (x).

Программа VI.1.1.4.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | В↑ | 0E | 13 | ПП | 53 | 26 | F $x^2$ | 22 |
| 01 | F π | 20 | 14 | 23 | 23 | 27 | : | 13 |
| 02 | × | 12 | 15 | П→x 2 | 62 | 28 | 1 | 01 |
| 03 | x→П 0 | 40 | 16 | П→x 3 | 63 | 29 | — | 11 |
| 04 | × | 12 | 17 | /—/ | 0L | 30 | × | 12 |
| 05 | x→П 1 | 41 | 18 | x→П 2 | 42 | 31 | П→x 1 | 61 |
| 06 | 2 | 02 | 19 | F . | 25 | 32 | : | 13 |
| 07 | : | 13 | 20 | ПП | 53 | 33 | 3 | 03 |
| 08 | F sin | 1C | 21 | 23 | 23 | 34 | П→x 1 | 61 |
| 09 | x→П 2 | 42 | 22 | С/П | 50 | 35 | F $x^2$ | 22 |
| 10 | F Bx | 0 | 23 | 1 | 01 | 36 | : | 13 |
| 11 | F cos | 1Г | 24 | 5 | 05 | 37 | 1 | 01 |
| 12 | x→П 3 | 43 | 25 | П→x 1 | 61 | 38 | — | 11 |

*Продолжение*

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 39 | П→x 2 | 62 | 44 | 2 | 02 |
| 40 | × | 12 | 45 | F 1/x | 23 |
| 41 | — | 11 | 46 | + | 10 |
| 42 | П→x 0 | 60 | 47 | В/О | 52 |
| 43 | : | 13 | | | |

Инструкция

Р/Г—в Р
x В/О С/П

Результат

S (x)—в рег. X
C (x)—в рег. Y

Регистры

0 πx
1 πx²
2;3 оперативные

Время вычисления — 30 с.

Абсолютная погрешность вычисления Δ не превышает

$$\Delta < \begin{cases} 5\cdot 10^{-4} \text{ для S,} \\ 3,\ 5\cdot 10^{-3} \text{ для C.} \end{cases}$$

*Пример.* x = 3,5. $\widetilde{S}$ (3,5) = 0,41525213, $\widetilde{C}$ (3,5) = 0,53257167. точные значения S (3,5) = 0,4152480, C (3,5) = 0,5325724.

### VI.1.1.5.ПОЛНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ

Полные эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода соответственно K (x) и E (x) определяются по формулам [11]:

$$K(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 t}},$$

$$E(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - x^2 \sin^2 t}\ dt.$$

Приведены программы вычисления K (x) и E (x) с разной степенью точности.

**VI.1.1.5.1.** K (x) и E (x) представляются приближенно в виде рядов [28]

$$K(x) = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \sum_{k=1}^{N}\left[\frac{(2k-1)!!}{2^k \cdot k!}\right]^2 \cdot x^{2k}\right\},$$

$$E(x) = \frac{\pi}{2}\left\{1 - \sum_{k=1}^{N}\left[\frac{(2k-1)!!}{2^k \cdot k!}\right]^2 \cdot \frac{x^{2k}}{2k-1}\right\}.$$

**VI.1.1.5.1.1.** По программе одновременно вычисляются K (x) и E (x)

Программа VI.1.1.5.1.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 1 | 41 | 19 | × | 12 | 38 | ↔ | 14 |
| 01 | 0 | 00 | 20 | П→x 2 | 62 | 39 | П→x 4 | 64 |
| 02 | x→П 3 | 43 | 21 | × | 12 | 40 | С/П | 50 |
| 03 | F π | 20 | 22 | x→П 2 | 42 | | | |
| 04 | 2 | 02 | 23 | F $x^2$ | 22 | | Инструкция | |
| 05 | : | 13 | 24 | 1 | 01 | | | |
| 06 | x→П 4 | 44 | 25 | П→x 3 | 63 | | x В/О С/П | |
| 07 | В↑ | 0 E | 26 | — | 11 | | | |
| 08 | F $\sqrt{}$ | 21 | 27 | : | 13 | | Результат | |
| 09 | x→П 2 | 42 | 28 | + | 10 | | | |
| 10 | ↔ | 14 | 29 | П→x 2 | 62 | | K (x)—в рег. X,4 | |
| 11 | П→x 1 | 61 | 30 | F $x^2$ | 22 | | E (x)—в рег. Y | |
| 12 | П→x 3 | 63 | 31 | П→x 4 | 64 | | | |
| 13 | 2 | 02 | 32 | + | 10 | | Регистры | |
| 14 | + | 10 | 33 | x→П 4 | 44 | | | |
| 15 | x→П 3 | 43 | 34 | F Bx | 0 | 1 | x | |
| 16 | F 1/x | 23 | 35 | — | 11 | 2;3 | оперативные | |
| 17 | 1 | 01 | 36 | F x=0 | 5E | 4 | K (x) | |
| 18 | — | 11 | 37 | 10 | 10 | | | |

Относительная погрешность вычисления $\delta$ не превышает $1 \cdot 10^{-6}$.

*Пример.* x = 0,5. $\widetilde{K}$ (0,5) = 1,6857504, $\widetilde{E}$ (0,5) = 1,4674622. Время вычисления примера — 2,5 мин.

**VI.1.1.5.1.2.** По программе VI.1.1.5.1.2/21 вычисляется K (x) или E (x) в зависимости от установки соответственно + 1 или — 1 в регистр памяти 2.

Программа VI.1.1.5.1.2/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P 4 | 41 | 32 | F $x^2$ | 55 | 64 | + | 96 |
| 01 | P π | 23 | 33 | ↑ | 06 | 65 | P 3 | 31 |
| 02 | 2 | 24 | 34 | F 5 | 52 | 70 | — | 86 |
| 03 | : | 36 | 35 | × | 26 | 71 | P x=0 | 59 |
| 04 | P 3 | 31 | 40 | P 5 | 51 | 72 | P 1п | 13 |
| 05 | P 5 | 51 | 41 | F 2 | 22 | 73 | + | 96 |
| 10 | 0 | 04 | 42 | 1 | 14 | 74 | С/П | 78 |
| 11 | P 6 | 61 | 43 | — | 86 | | | |
| 12 | F 6 | 62 | 44 | ↑ | 06 | | Инструкция | |
| 13 | 1 | 14 | 45 | F 6 | 62 | | | |
| 14 | + | 96 | 50 | × | 26 | | в рег. 2 { +1 для K; —1 для E | |
| 15 | P 6 | 61 | 51 | 1 | 14 | | x В/О С/П | |
| 20 | 2 | 24 | 52 | + | 96 | | | |
| 21 | × | 26 | 53 | ↑ | 06 | | Регистры | |
| 22 | F 1/x | 45 | 54 | F 5 | 52 | | | |
| 23 | 1 | 14 | 55 | ↔ | 16 | | | |
| 24 | — | 86 | 60 | : | 36 | 2 | +1 или —1 | |
| 25 | ↑ | 06 | 61 | ↑ | 06 | 3 | K (x) или E (x) | |
| 30 | F 4 | 42 | 62 | F 3 | 32 | 4 | x | |
| 31 | × | 26 | 63 | ↔ | 16 | 5;6 | оперативные | |

Относительная погрешность вычисления σ не превышает $1.10^{-6}$

*Примеры.* x = 0,8. $\widetilde{K}$ (0,8) = 1,995302, $\widetilde{E}$ (0,8) = 1,27635; точные значения K (0,8) = 1,99530278, E (0, 8) = 1,27634994.

Время вычисления примера — 3 мин.

По программе VI. 1.1.5.1 2/54, 52 вычисляется K (x) или E (x) в зависимости от предварительной установки значения соответственно 0 или 1 в регистре памяти C.

Программа VI.1.1.5.1.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | F $x^2$ | 22 | 14 | П→x 0 | 60 | 28 | 2 | 02 |
| 01 | 9 | 09 | 15 | — | 11 | 29 | : | 13 |
| 02 | x→П 0 | 40 | 16 | П→x C | 6C | 30 | С/П | 50 |
| 03 | F 1/x | 23 | 17 | × | 12 | | | |
| 04 | П→x 0 | 60 | 18 | 2 | 02 | | Инструкция | |
| 05 | 2 | 02 | 19 | × | 12 | В рег. С | { 0 для K; 1 для E; | |
| 06 | × | 12 | 20 | 1 | 01 | | x В/О С/П | |
| 07 | F 1/x | 23 | 21 | + | 10 | | | |
| 08 | 1 | 01 | 22 | F 1/x | 23 | | Регистры | |
| 09 | — | 11 | 23 | + | 10 | | | |
| 10 | F $x^2$ | 22 | 24 | F L0 | 5Г | | | |
| 11 | × | 12 | 25 | 04 | 04 | | | |
| 12 | × | 12 | 26 | F π | 20 | | 0 счетчик | |
| 13 | 1 | 01 | 27 | × | 12 | | C 0 или 1 | |

Время вычисления 1 мин.

Относительная погрешность вычисления

$$\delta_K < \begin{cases} 1{,}1 \cdot 10^{-3} & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 0{,}8, \\ 1{,}3 \cdot 10^{-2} & \text{при } 0{,}8 < x \leqslant 0{,}9, \end{cases}$$

$$\delta_E < \begin{cases} 4 \cdot 10^{-4} & \text{при } 0 < x \leqslant 0{,}9, \\ 2{,}3 \cdot 10^{-2} & \text{при } 0{,}9 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

*Пример.* x = 0,8. $\widetilde{K}$ (0,8) = 1,99307, $\widetilde{E}$ (0,8) = 1,27658; точные значения K (0,8) = 1,99530278, E (0,8) = 1,27634994.

**VI.1.1.5.1.3.** По программе вычисляется K (x) или E (x) в зависимости от предварительной установки переключателя Р/Г: K (x) — если переключатель в положении Г, E (x) — если переключатель в положении Р.

Программа VI.1.1.5.1.3/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 1 | 41 | 18 | + | 10 | 36 | F x=0 | 5E |
| 01 | 0 | 00 | 19 | x→П 3 | 43 | 37 | 14 | 14 |
| 02 | x→П 3 | 43 | 20 | F 1/x | 23 | 38 | + | 10 |
| 03 | F π | 20 | 21 | 1 | 01 | 39 | С/П | 50 |
| 04 | F cos | 1Г | 22 | — | 11 | | | |
| 05 | F x⩾0 | 59 | 23 | × | 12 | | Инструкция | |
| 06 | 08 | 08 | 24 | П→x 2 | 62 | | | |
| 07 | 0 | 00 | 25 | × | 12 | Р Г | в Г для К | |
| 08 | x→П 4 | 44 | 26 | x→П 2 | 42 | | в Р для Е | |
| 09 | F π | 20 | 27 | F x² | 22 | | x В/О С/П | |
| 10 | 2 | 02 | 28 | П→x 4 | 64 | | | |
| 11 | : | 13 | 29 | П→x 3 | 63 | | Регистры | |
| 12 | F $\sqrt{}$ | 21 | 30 | × | 12 | | | |
| 13 | x→П 2 | 42 | 31 | 1 | 01 | | 1 x | |
| 14 | F Bx | 0 | 32 | + | 10 | | 2;3 оперативные | |
| 15 | П→x 1 | 61 | 33 | : | 13 | | 4 0; —1 | |
| 16 | П→x 3 | 63 | 34 | + | 10 | | | |
| 17 | 2 | 02 | 35 | — | 11 | | | |

Относительная погрешность вычисления $\delta$ не превышает $1.10^{-6}$

*Примеры.* x = 0,5.

1) Переключатель Р/Г в положении Г.

$\widetilde{K}$ (0,5) = 1,6857504

2) Переключатель Р/Г в положении Р.

$\widetilde{E}$ (0,5) = 1,4674622.

Время вычисления примера — 1,5 мин.

**V1.1.1.5.2.** Вычисление приближенного значения $\widetilde{E}$ (x) по формуле 7]

$$E(x) = \frac{\pi - (\pi - 2)\, x^3}{2}$$

Программа VI.1.1.5.2/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | ↑ | 06 | 11 | ↑ | 06 | 22 | 2 | 24 |
| 01 | F x² | 55 | 12 | Р /— | 53 | 23 | : | 36 |
| 02 | × | 26 | 13 | × | 26 | 24 | С/П | 78 |
| 03 | Р , | 43 | 14 | ↑ | 06 | | | |
| 04 | Р π | 23 | 15 | Р π | 23 | | Инструкция | |
| 05 | 2 | 24 | 20 | ←→ | 16 | | | |
| 10 | — | 86 | 21 | — | 86 | | x В/О С/П | |

Программа VI.1.1.5.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | F $x^2$ | 22 | 06 | × | 12 |
| 01 | F Bx | 0 | 07 | F π | 20 |
| 02 | × | 12 | 08 | + | 10 |
| 03 | 2 | 02 | 09 | 2 | 02 |
| 04 | F π | 20 | 10 | : | 13 |
| 05 | — | 11 | 11 | С/П | 50 |

Инструкция

x В/О С/П

Время вычисления — 4 с.

Относительная погрешность δ не превышает 2 %.

*Пример.* x = 0,8. $\tilde{E}$ (0,8) = 1,2785.

**VI.1.1.5.3.** Вычисляется приближенное значение $\tilde{K}$ (x) по формуле [7]

$$\tilde{K}(x) = \frac{\pi}{2} - 0{,}47 \cdot \ln(1 - x^{9/4}).$$

Программа VI.1.1.5.3/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | ↑ | 06 | 13 | P ln | 13 | 30 | — | 86 |
| 01 | F $x^2$ | 55 | 14 | 0 | 04 | 31 | 2 | 24 |
| 02 | ←→ | 16 | 15 | , | 46 | 32 | : | 36 |
| 03 | F $\sqrt{}$ | 65 | 20 | 9 | 94 | 33 | С/П | 78 |
| 04 | F $\sqrt{}$ | 65 | 21 | 4 | 44 | | | |
| 05 | × | 26 | 22 | × | 26 | | Инструкция | |
| 10 | 1 | 14 | 23 | ↑ | 06 | | | |
| 11 | ←→ | 16 | 24 | P π | 23 | | x В/О С/П | |
| 12 | — | 86 | 25 | ←→ | 16 | | | |

Программа VI.1.1.5.3/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | F π | 20 | 08 | × | 12 | 16 | 7 | 07 |
| 01 | 2 | 02 | 09 | 1 | 01 | 17 | × | 12 |
| 02 | : | 13 | 10 | ←→ | 14 | 18 | — | 11 |
| 03 | ←→ | 14 | 11 | — | 11 | 19 | С/П | 50 |
| 04 | F $x^2$ | 22 | 12 | F ln | 18 | | | |
| 05 | F Bx | 0 | 13 | 0 | 00 | | Инструкция | |
| 06 | F $\sqrt{}$ | 21 | 14 | , | 0— | | | |
| 07 | F $\sqrt{}$ | 21 | 15 | 4 | 04 | | x В/О С/П | |

Время вычисления — 7 с.

Относительная погрешность вычисления $\delta$ при $x < 0{,}999$ не превышает 2 %.

*Пример.* $x = 0{,}8$. $\tilde{K}(0{,}8) = 2{,}008$

### VI.1.1.6. ДИЛОГАРИФМ И ТРИЛОГАРИФМ

Дилогарифм определяется как

$$Li_2(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt, \quad |x| \leqslant 1$$

и представляется в виде ряда [29]:

$$Li_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}.$$

Трилогарифм определяется через дилогарифм как

$$Li_3(x) = \int_0^x \frac{Li_2(t)}{t}\,dt, \quad |x| \leqslant 1$$

и представляется в виде ряда [29]:

$$Li_3(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^3}.$$

По программам одновременно вычисляются $Li_2(x)$ и $Li_3(x)$. В результате вычисления $Li_2(x)$ размещается в регистре X, а $Li_3(x)$ — в регистре Y.

Программа VI.1.1.6/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P 4 | 41 | 31 | ↑ | 06 | 62 | P x=0 | 59 |
| 01 | 0 | 04 | 32 | F 6 | 62 | 63 | F 1 | 12 |
| 02 | P 2 | 21 | 33 | ←→ | 16 | 64 | F 3 | 32 |
| 03 | P 3 | 31 | 34 | : | 36 | 65 | ←→ | 16 |
| 04 | P 5 | 51 | 35 | ↑ | 06 | 70 | С/П | 78 |
| 05 | 1 | 14 | 40 | F 3 | 32 | | | |
| 10 | P 6 | 61 | 41 | + | 96 | Инструкция | | |
| 11 | F 6 | 62 | 42 | P 3 | 31 | | | |
| 12 | ↑ | 06 | 43 | F 6 | 62 | x В/О С/П | | |
| 13 | F 4 | 42 | 44 | ↑ | 06 | | | |
| 14 | × | 26 | 45 | F 5 | 52 | Результат | | |
| 15 | P 6 | 61 | 50 | F $x^2$ | 55 | $Li_2$—в рег. X, 2 | | |
| 20 | F 5 | 52 | 51 | : | 36 | $Li_3$—в рег. Y, 3 | | |
| 21 | 1 | 14 | 52 | ↑ | 06 | | | |
| 22 | + | 96 | 53 | F 2 | 22 | Регистры | | |
| 23 | P 5 | 51 | 54 | ←→ | 16 | 2 $Li_2$ | | |
| 24 | ↑ | 06 | 55 | + | 96 | 3 $Li_3$ | | |
| 25 | F $x^2$ | 55 | 60 | P 2 | 21 | 4 x | | |
| 30 | × | 26 | 61 | — | 86 | 5;6 оперативные | | |

Программа VI.1.1.6/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 1 | 41 | 16 | : | 13 |
| 01 | 0 | 00 | 17 | + | 10 |
| 02 | x→П 3 | 43 | 18 | F Bx | 0 |
| 03 | x→П 4 | 44 | 19 | П→x 3 | 63 |
| 04 | 1 | 01 | 20 | : | 13 |
| 05 | x→П 2 | 42 | 21 | П→x 4 | 64 |
| 06 | ←→ | 14 | 22 | + | 10 |
| 07 | П→x 1 | 61 | 23 | x→П 4 | 44 |
| 08 | П→x 2 | 62 | 24 | F Bx | 0 |
| 09 | × | 12 | 25 | — | 11 |
| 10 | x→П 2 | 42 | 26 | F x=0 | 5E |
| 11 | П→x 3 | 63 | 27 | 06 | 06 |
| 12 | 1 | 01 | 28 | ←→ | 14 |
| 13 | + | 10 | 29 | П→x 4 | 64 |
| 14 | x→П 3 | 43 | 30 | ←→ | 14 |
| 15 | F $x^2$ | 22 | 31 | С/П | 50 |

Инструкция

x В/О С/П

Результат

$Li_2(x)$ — в рег. X
$Li_3(x)$ — в рег. Y, 4

Регистры

1 x
2;3 оперативные
4 $Li_3(x)$

Время вычисления при $0{,}1 \leqslant x \leqslant 0{,}9$ составляет $T \simeq (5\,x^2 + 1)$ мин.

Относительная погрешность вычисления $\delta$ при $x \leqslant 0{,}9$ не превышает $1.10^{-5}$.

*Пример.* $x = 0{,}5$. $\widetilde{Li}_2(0{,}5) = 0{,}5822405$, $\widetilde{Li}_3(0,\ 5) = 0{,}5372132$; точные значения $Li_2\,(0{,}5) = 0{,}582240526$, $Li_3\,(0{,}5) = 0{,}5372132$.

### VI.1.1.7. ФУНКЦИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО

Функция Лобачевского L (x) определяется как [28]:

$$L(x) = -\int_0^x \ln\cos t\,dt, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/2.$$

**VI.1.1.7.1.** Функция L (x) вычисляется приближенно с помощью ряда [28]

$$L(x) = x\ln 2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(-1)^i\,\frac{\sin 2ix}{i^2}.$$

Программа VI.1.1.7.1/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P 2 | 21 | 05 | P 3 | 31 | 14 | ↑ | 06 |
| 01 | 2 | 24 | 10 | 9 | 94 | 15 | F 2 | 22 |
| 02 | P 4 | 41 | 11 | 8 | 84 | 20 | × | 26 |
| 03 | P ln | 13 | 12 | P 5 | 51 | 21 | P sin | 93 |
| 04 | × | 26 | 13 | F 5 | 52 | 22 | ↑ | 06 |

*Продолжение*

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 23 | F 5 | 52 | 41 | + | 96 |
| 24 | F $x^2$ | 55 | 42 | P 3 | 31 |
| 25 | : | 36 | 43 | F 5 | 52 |
| 30 | ↑ | 06 | 44 | 2 | 24 |
| 31 | F 4 | 42 | 45 | — | 86 |
| 32 | /—/ | 56 | 50 | P 5 | 51 |
| 33 | P 4 | 41 | 51 | P x = 0 | 59 |
| 34 | × | 26 | 52 | 1 | 14 |
| 35 | ↑ | 06 | 53 | F 3 | 32 |
| 40 | F 3 | 32 | 54 | С/П | 78 |

Инструкция

x В/О С/П

Регистры

2 x

3 L

4;5 оперативные

Программа VI.1.1.7.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | B↑ | 0E | 12 | × | 12 |
| 01 | + | 10 | 13 | F sin | 1C |
| 02 | 9 | 09 | 14 | 2 | 02 |
| 03 | 8 | 08 | 15 | : | 13 |
| 04 | x→П 0 | 40 | 16 | П→x 0 | 60 |
| 05 | F Bx | 0 | 17 | F $x^2$ | 22 |
| 06 | 2 | 02 | 18 | : | 13 |
| 07 | F ln | 18 | 19 | — | 11 |
| 08 | × | 12 | 20 | F L0 | 5Г |
| 09 | /—/ | 0L | 21 | 09 | 09 |
| 10 | ←→ | 14 | 22 | С/П | 50 |
| 11 | П→x 0 | 60 | | | |

Инструкция

Р/Г — в Р

x В/О С/П

Регистр

0 оперативный

Время вычисления — 5 —7 мин.

Абсолютная погрешность вычисления $\Delta$ не превышает $1.10^{-4}$.

*Пример.* x = $\pi/3$. $\tilde{L}$ ($\pi$ /3) = 0,2184.

**VI.1.1.7.2.** Функция L (x) представляется приближенно в виде [7]

$$\tilde{L}(x) = \frac{7x^3}{42 - \pi x^2 e^{x^2/\pi}} .$$

Программа VI.1.1.7.2/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | ↑ | 06 | 05 | : | 36 | 14 | ↑ | 06 |
| 01 | P /—/ | 53 | 10 | P /—/ | 53 | 15 | P π | 23 |
| 02 | ←→ | 16 | 11 | P π | 23 | 20 | × | 26 |
| 03 | F $x^2$ | 55 | 12 | : | 36 | 21 | 7 | 74 |
| 04 | 6 | 64 | 13 | P $e^x$ | 33 | 22 | : | 36 |

*Продолжение*

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 23 | ↑ | 06 | 32 | ↑ | 06 |
| 24 | P , | 43 | 33 | P , | 43 |
| 25 | F 1/x | 45 | 34 | ←→ | 16 |
| 30 | ←→ | 16 | 35 | : | 36 |
| 31 | — | 86 | 40 | С/П | 78 |

Инструкция

x В/О С/П

Программа VI.1.1.7.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | B ↑ | 0E | 07 | : | 13 | 14 | : | 13 |
| 01 | F $x^2$ | 22 | 08 | F $e^x$ | 16 | 15 | С/П | 50 |
| 02 | 6 | 06 | 09 | F π | 20 | | | |
| 03 | ←→ | 14 | 10 | × | 12 | | | |
| 04 | : | 13 | 11 | 7 | 07 | | | |
| 05 | F Bx | 0 | 12 | : | 13 | | | |
| 06 | F π | 20 | 13 | — | 11 | | | |

Инструкция

x В/О С/П

Время вычисления — 7 с.

Относительная погрешность вычисления δ не превышает 1,6 %.

*Пример.* $x = \pi/4$, $L(\pi/4) = 0{,}08555$; точное значение $L(\pi/4) = 0{,}0864135$.

## VI.1.2. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ

### VI.1.2.1. ПОЛИНОМЫ ЛАГЕРРА

Обобщенные полиномы Лагерра записываются в виде

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x} x^{n+\alpha}).$$

Для вычисления $L_n^{(\alpha)}(x)$ используется их представление в виде рекуррентного соотношения [11]

$$k \cdot L_k^{(\alpha)} = (2k + \alpha - 1 - x) L_{k-1}^{(\alpha)}(x) - (k + \alpha - 1) L_{k-2}^{(\alpha)}(x)$$

при $L_{-1}^{(\alpha)}(x) \equiv 0$, $L_0^{(\alpha)}(x) \equiv 1$.

#### VI.1.2.1.1. ВЫЧИСЛЕНИЕ $L_n^{(\alpha)}(x)$ при фиксированном n

Перед вычислением $L_n^{(\alpha)}(x)$ значение $\alpha$ помещается в регистр памяти 1 и сохраняется в нем по окончании вычислений.

Программа VI.1.2.1.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 3 | 43 | 14 | П→x 5 | 65 | 28 | F L3 | 5— |
| 01 | ←→ | 14 | 15 | К П→x 5 | Г5 | 29 | 07 | 07 |
| 02 | x→П 2 | 42 | 16 | F . | 25 | 30 | С П | 50 |
| 03 | 0 | 00 | 17 | П→x 5 | 65 | | | |
| 04 | x→П 4 | 44 | 18 | + | 10 | | Инструкция | |
| 05 | x→П 5 | 45 | 19 | П→x 2 | 62 | | | |
| 06 | 1 | 01 | 20 | — | 11 | | α x→П 1 | |
| 07 | П→x 5 | 65 | 21 | П→x 1 | 61 | | x В↑ n В/О С П | |
| 08 | П→x 1 | 61 | 22 | + | 10 | | | |
| 09 | ·- | 10 | 23 | × | 12 | | Регистры | |
| 10 | П→x 4 | 64 | 24 | — | 11 | | | |
| 11 | × | 12 | 25 | /—/ | 0L | 1 | α | |
| 12 | ←→ | 14 | 26 | П→x 5 | 65 | 2 | x | |
| 13 | x→П 4 | 44 | 27 | : | 13 | 3 — 5 оперативные | | |

Время вычисления — $T = 2(4n + 1)$ с.

*Пример.* $\alpha = 3$, $x = 2{,}5$, $n = 5$. $L_5^{(3)}(2{,}5) = -4{,}7096$.

### VI.1.2.1.2. Вычисление $L_k^{(\alpha)}(x)$ в пошаговом режиме

Для вычисления $L_k^{(\alpha)}(x)$ в пошаговом режиме ($k = 0,1,2 \ldots$) значение $\alpha$ перед вычислением помещается в регистр памяти 2.

Программа VI.1.2.1.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 3 | 43 | 15 | F . | 25 |
| 01 | 0 | 00 | 16 | П→x 5 | 65 |
| 02 | x→П 4 | 44 | 17 | + | 10 |
| 03 | x→П 5 | 45 | 18 | П→x 2 | 62 |
| 04 | 1 | 01 | 19 | + | 10 |
| 05 | С П | 50 | 20 | П→x 3 | 63 |
| 06 | П→x 4 | 64 | 21 | — | 11 |
| 07 | П→x 5 | 65 | 22 | × | 12 |
| 08 | П→x 2 | 62 | 23 | — | 11 |
| 09 | + | 10 | 24 | /—/ | 0L |
| 10 | × | 12 | 25 | П→x 5 | 65 |
| 11 | ←→ | 14 | 26 | : | 13 |
| 12 | x→П 4 | 44 | 27 | БП | 51 |
| 13 | П→x 5 | 65 | 28 | 05 | 05 |
| 14 | К П→x 5 | Г5 | | | |

Инструкция

α x→П 2

x В/О С/П С/П С/П...

Результат

$L_0^{(\alpha)}(x)$, $L_1^{(\alpha)}(x)$, $L_2^{(\alpha)}(x)$, ...

Регистры

| | |
|---|---|
| 2 | α |
| 3 | x |
| 4;5 | оперативные |

Время вычисления одного значения $L_k^{(\alpha)}(x)$ — 8 с.

*Пример.* $\alpha = 2$, x = 3. $L_k^{(2)}(3) = 1; 0; -1{,}5; -2; \ldots$

**VI.1.2.1.3.** Частный случай $L_n(x) = L_n^{(0)}(x)$ при фиксированном n представляется в виде конечной суммы

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \frac{(-x)^i}{i!}.$$

Программа VI.1.2.1.3/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P 3 | 31 | 24 | : | 36 | 52 | P 3 | 31 |
| 01 | ←→ | 16 | 25 | ↑ | 06 | 53 | P x= | 59 |
| 02 | P 2 | 21 | 30 | F 2 | 22 | 54 | P ln | 13 |
| 03 | 1 | 14 | 31 | × | 26 | 55 | F 4 | 42 |
| 04 | P 4 | 41 | 32 | ↑ | 06 | 60 | С/П | 78 |
| 05 | P 5 | 51 | 33 | F 5 | 52 | | | |
| 10 | 0 | 04 | 34 | /—/ | 56 | | Инструкция | |
| 11 | P 6 | 61 | 35 | × | 26 | | | |
| 12 | F 6 | 62 | 40 | P 5 | 51 | | x ↑ n В/О С/П | |
| 13 | 1 | 14 | 41 | ↑ | 06 | | | |
| 14 | + | 96 | 42 | F 4 | 42 | | Регистры | |
| 15 | P 6 | 61 | 43 | + | 96 | | | |
| 20 | F 3 | 32 | 44 | P 4 | 41 | | 2 x | |
| 21 | ↑ | 06 | 45 | F 3 | 32 | | 3 n | |
| 22 | F 6 | 62 | 50 | 1 | 14 | | 4 $L_n(x)$ | |
| 23 | F $x^2$ | 55 | 51 | — | 86 | | 5;6 оперативные | |

Программа VI.1.2.1.3/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 0 | 40 | 09 | F $x^2$ | 22 |
| 01 | ←→ | 14 | 10 | : | 13 |
| 02 | /—/ | 0L | 11 | × | 12 |
| 03 | 1 | 01 | 12 | × | 12 |
| 04 | x→П 6 | 46 | 13 | 1 | 01 |
| 05 | П→x 6 | 66 | 14 | + | 10 |
| 06 | К П→x 6 | Г6 | 15 | F L0 | 5Г |
| 07 | F . | 25 | 16 | 05 | 05 |
| 08 | П→x 0 | 60 | 17 | С/П | 50 |

Инструкция

x В ↑ n В/О С/П

Регистры

0;6 оперативные

Время вычисления — T = (5n) с.

*Пример.* x = 0,7, n = 2. $L_2(0{,}7) = -0{,}155$.

### VI.1.2.1.4. Пошаговый вывод $L_k(x)$

Для вычисления $L_k(x)$ (k = 0,1,2, ...) используется рекуррентное соотношение VI.1.2.1 при $\alpha = 0$.

Программа VI.1.2.1.4/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P 2 | 21 | 24 | ↑ | 06 | 52 | P /—/ | 53 |
| 01 | 0 | 04 | 25 | F 2 | 22 | 53 | ←→ | 16 |
| 02 | P 3 | 31 | 30 | — | 86 | 54 | : | 36 |
| 03 | 1 | 14 | 31 | ↑ | 06 | 55 | БП | 58 |
| 04 | P 4 | 41 | 32 | F 4 | 42 | 60 | F ↑ | 05 |
| 05 | С/П | 78 | 33 | P 5 | 51 | | | |
| 10 | F 3 | 32 | 34 | × | 26 | | Инструкция | |
| 11 | ↑ | 06 | 35 | ↑ | 06 | | | |
| 12 | F 5 | 52 | 40 | P /— | 53 | x В/О С/П С/П С/П ... | | |
| 13 | × | 26 | 41 | — | 86 | | Результат | |
| 14 | P , | 43 | 42 | P , | 43 | $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$, ... | | |
| 15 | F 3 | 32 | 43 | F 3 | 32 | | Регистры | |
| 20 | 2 | 24 | 44 | 1 | 14 | | 2 x | |
| 21 | × | 26 | 45 | + | 96 | | 3 k | |
| 22 | 1 | 14 | 50 | P 3 | 31 | | 4 $L_k$ | |
| 23 | + | 96 | 51 | ↑ | 06 | | 5 $L_{k-1}$ | |

Программа VI.1.2.1.4/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Инструкция |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 3 | 43 | 12 | F . | 25 | x В/О С/П С/П С/П ... |
| 01 | Cx | 0Г | 13 | П→x 5 | 65 | |
| 02 | x→П 5 | 45 | 14 | + | 10 | Результат |
| 03 | 1 | 01 | 15 | П→x 3 | 63 | |
| 04 | С/П | 50 | 16 | — | 11 | $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$, ... |
| 05 | П→x 4 | 64 | 17 | × | 12 | |
| 06 | П→x 5 | 65 | 18 | — | 11 | |
| 07 | × | 12 | 19 | /— | 0L | |
| 08 | ←→ | 14 | 20 | П→x 5 | 65 | Регистры |
| 09 | x→П 4 | 44 | 21 | : | 13 | |
| 10 | П→x 5 | 65 | 22 | БП | 51 | 3 x |
| 11 | К П→x 5 | Г5 | 23 | 04 | 04 | 4;5 оперативные |

Время вычисления одного значения $L_k(x)$ — 5—7 с.
*Пример.* x = 0,6. $L_k(x) = 1$; 0,4; —0,02; —0,296; ...

### VI.1.2.2. ПОЛИНОМЫ ЛЕЖАНДРА

Полиномы Лежандра определяются соотношением [11]

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n.$$

Для вычисления $P_n(x)$ используется рекуррентное соотношение

$$k \cdot P_k(x) = (2k - 1) \cdot x \cdot P_{k-1}(x) - (k - 1) \cdot P_{k-2}(x),$$

где $P_0(x) \equiv 1$, $P_1(x) = x$.

## VI.1.2.2.1. Вычисление $P_n(x)$ при фиксированном n

Программа VI.1.2.2.1/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P 3 | 31 | 31 | × | 26 | 62 | ↑ | 06 |
| 01 | ←→ | 16 | 32 | ↑ | 06 | 63 | F 6 | 62 |
| 02 | P 2 | 21 | 33 | F 4 | 42 | 64 | — | 86 |
| 03 | 0 | 04 | 34 | P 5 | 51 | 65 | P x=0 | 59 |
| 04 | P 6 | 61 | 35 | × | 26 | 70 | F 1 | 12 |
| 05 | 1 | 14 | 40 | ↑ | 06 | 71 | F 4 | 42 |
| 10 | P 4 | 41 | 41 | P /—/ | 53 | 72 | С/П | 78 |
| 11 | F 6 | 62 | 42 | — | 86 | | | |
| 12 | ↑ | 06 | 43 | P , | 43 | | Инструкция | |
| 13 | F 5 | 52 | 44 | F 6 | 62 | | | |
| 14 | × | 26 | 45 | 1 | 14 | | x ↑ n В/О С/П | |
| 15 | P , | 43 | 50 | + | 96 | | | |
| 20 | F 6 | 62 | 51 | P 6 | 61 | | Регистры | |
| 21 | 2 | 24 | 52 | ↑ | 06 | | | |
| 22 | × | 26 | 53 | P /—/ | 53 | | 2 x | |
| 23 | 1 | 14 | 54 | ←→ | 16 | | 3 n | |
| 24 | + | 96 | 55 | : | 36 | | 4 $P_n$ | |
| 25 | ↑ | 06 | 60 | P 4 | 41 | | 5 $P_{n-1}$ | |
| 30 | F 2 | 22 | 61 | F 3 | 32 | | 6 оперативный | |

Программа VI.1.2.2.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 3 | 43 | 11 | F Bx | 0 | 22 | С/П | 50 |
| 01 | ←→ | 14 | 12 | ←→ | 14 | | | |
| 02 | x→П 2 | 42 | 13 | — | 11 | | Инструкция | |
| 03 | Cx | 0Г | 14 | F Bx | 0 | | | |
| 04 | x→П 4 | 44 | 15 | К П→x 4 | Г4 | | x B ↑ n В/О С/П | |
| 05 | 1 | 01 | 16 | F . | 25 | | | |
| 06 | ←→ | 14 | 17 | П→x 4 | 64 | | Регистры | |
| 07 | F Bx | 0 | 18 | : | 13 | | | |
| 08 | П→x 2 | 62 | 19 | + | 10 | | 2 x | |
| 09 | × | 12 | 20 | F L3 | 5— | | 3:4 оперативные | |
| 10 | — | 11 | 21 | 06 | 06 | | | |

Время вычисления — $T = (6n)$ с.
*Пример.* $x = 0{,}7$, $n = 2$. $P_2(0{,}7) = 0{,}235$.

## VI.1.2.2.2. Пошаговый вывод $P_k(x)$

Значения $P_k(x)$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) выводятся последовательно при выполнении команд В/О С/П С/П С/П ...

Программа VI.1.2.2.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 4 | 44 | 11 | ←→ | 14 |
| 01 | Cx | 0Г | 12 | — | 11 |
| 02 | x→П 5 | 45 | 13 | F Bx | 0 |
| 03 | 1 | 01 | 14 | К П→x 5 | Г5 |
| 04 | С/П | 50 | 15 | F . | 25 |
| 05 | ←→ | 14 | 16 | П→x 5 | 65 |
| 06 | F Bx | 0 | 17 | : | 13 |
| 07 | П→x 4 | 64 | 18 | + | 10 |
| 08 | × | 12 | 19 | БП | 51 |
| 09 | — | 11 | 20 | 04 | 04 |
| 10 | F Bx | 0 | | | |

Инструкция

x В/О С/П С/П С/П...

Результат

$P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$,...

Регистры

4 x
5 оперативный

Время вычисления одного значения $P_k$ (x) — 6 с.

*Пример.* x = 0,6. $P_k$ (0,6) = 1; 0,6; 0,04; — 0,36; ...

Для пошагового вывода полиномов Лежандра на Б3-21 используется программа VI.1.2.1.4/21 с заменой в адресе 30 команды (—) на команду (×).

### VI.1.2.3. ПОЛИНОМЫ ЭРМИТА

Полиномы Эрмита $H_n$ (x) определяются как

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \cdot \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}).$$

Для вычисления $H_n$ (x) используется рекуррентное соотношение [11]

$$H_{k+1}(x) = 2x \cdot H_k(x) - 2kH_{k-1}(x),$$

где $H_0$ (x) = 1.

#### VI.1.2.3.1. Вычисление $H_n$ (x) при фиксированном n

Программа VI.1.2.3.1/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P 3 | 31 | 05 | 1 | 14 | 14 | × | 26 |
| 01 | ←→ | 16 | 10 | P 4 | 41 | 15 | P . | 43 |
| 02 | P 2 | 21 | 11 | F 5 | 52 | 20 | F 4 | 42 |
| 03 | 0 | 04 | 12 | ↑ | 06 | 21 | P 5 | 51 |
| 04 | P 6 | 61 | 13 | F 6 | 62 | 22 | ↑ | 06 |

*Продолжение*

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 23 | F 2 | 22 | 41 | + | 96 |
| 24 | × | 26 | 42 | P 6 | 61 |
| 25 | ↑ | 06 | 43 | ↑ | 06 |
| 30 | P /—/ | 53 | 44 | F 3 | 32 |
| 31 | — | 86 | 45 | — | 86 |
| 32 | 2 | 24 | 50 | P x=0 | 59 |
| 33 | × | 26 | 51 | F 1 | 12 |
| 34 | P 4 | 41 | 52 | F 4 | 42 |
| 35 | F 6 | 62 | 53 | С/П | 78 |
| 40 | 1 | 14 | | | |

Инструкция

x ↑ n В/О С/П

Регистры

2 x
3 n
4 $H_n$
5 $H_{n-1}$
6 оперативный

Программа VI.1.2.3.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 0 | 40 | 10 | ←→ | 14 |
| 01 | x→П 2 | 42 | 11 | П→x 1 | 61 |
| 02 | ←→ | 14 | 12 | × | 12 |
| 03 | x→П 1 | 41 | 13 | + | 10 |
| 04 | 1 | 01 | 14 | В↑ | 0E |
| 05 | ←→ | 14 | 15 | + | 10 |
| 06 | П→x 2 | 62 | 16 | F L2 | 58 |
| 07 | П→x 0 | 60 | 17 | 05 | 05 |
| 08 | — | 11 | 18 | С/П | 50 |
| 09 | × | 12 | | | |

Инструкция

x В↑ n В/О С/П

Регистры

0 n
1 x
2 счетчик

Время вычисления — T = (4n) с.
*Пример.* n = 3, x = 1. $H_3$ (1) = — 4.

## VI.1.2.3.2. Пошаговый вывод $H_k(x)$ (k=0, 1, 2, ...)

Программа VI.1.2.3.2/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P 2 | 21 | 21 | + | 96 | 42 | F ↑ | 05 |
| 01 | 0 | 04 | 22 | P 3 | 31 | | | |
| 02 | P 3 | 31 | 23 | F 2 | 22 | | | |
| 03 | 1 | 14 | 24 | ↑ | 06 | | | |
| 04 | P 4 | 41 | 25 | F 4 | 42 | | | |
| 05 | С/П | 78 | 30 | P 5 | 51 | | | |
| 10 | F 3 | 32 | 31 | × | 26 | | | |
| 11 | ↑ | 06 | 32 | ↑ | 06 | | | |
| 12 | F 5 | 52 | 33 | P /—/ | 53 | | | |
| 13 | × | 26 | 34 | — | 86 | | | |
| 14 | P , | 43 | 35 | 2 | 24 | | | |
| 15 | F 3 | 32 | 40 | × | 26 | | | |
| 20 | 1 | 14 | 41 | БП | 58 | | | |

Инструкция

x В/О С/П С/П С/П ...

Результат

$H_0(x)$, $H_1(x)$, $H_2(x)$ ...

Регистры

2 x
3 k
4 $H_k$
5 $H_{k-1}$

Программа VI.1.2.3.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 1 | 41 | 09 | × | 12 |
| 01 | 1 | 01 | 10 | ←→ | 14 |
| 02 | x→П 2 | 42 | 11 | П→x 1 | 61 |
| 03 | С/П | 50 | 12 | × | 12 |
| 04 | ←→ | 14 | 13 | + | 10 |
| 05 | П→x 2 | 62 | 14 | 2 | 02 |
| 06 | 1 | 01 | 15 | × | 12 |
| 07 | — | 11 | 16 | БП | 51 |
| 08 | x→П 2 | 42 | 17 | 0 3 | 03 |

Инструкция

x В/О С/П С/П С/П ...

Результат

$H_0(x)$, $H_1(x)$, $H_2(x)$, ...

Регистры

1 x

2 оперативный

Время вычисления одного значения $H_к(x)$ — 4 с.
*Пример.* x = 0,5. $H_к(0,5)$ = 1,1, —1, —5, 1, ...

### VI.1.2.4. ФУНКЦИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА

Функция параболического цилиндра $\varphi_n(x)$ связана с полиномом Эрмита $H_n(x)$ соотношением [28]

$$\varphi_n(x) = H_n(x) \cdot \frac{e^{-x/2}}{\sqrt{n!\,2^n\sqrt{\pi}}}.$$

По приведенной программе одновременно вычисляются полином Эрмита $H_n(x)$ и функция параболического цилиндра $\varphi_n(x)$ при фиксированном $n \geqslant 1$.

Программа VI.1.2.4/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 1 | 41 | 15 | + | 10 | 30 | F $\sqrt{-}$ | 21 |
| 01 | x→П 2 | 42 | 16 | F L2 | 58 | 31 | : | 13 |
| 02 | ←→ | 14 | 17 | 05 | 05 | 32 | С/П | 50 |
| 03 | x→П 0 | 40 | 18 | В↑ | 0E | | | |
| 04 | 1 | 01 | 19 | F π | 20 | | | |
| 05 | ←→ | 14 | 20 | F $\sqrt{-}$ | 21 | | | |
| 06 | П→x 2 | 62 | 21 | П→x 1 | 61 | | | |
| 07 | П→x 1 | 61 | 22 | × | 12 | | | |
| 08 | — | 11 | 23 | В↑ | 0E | | | |
| 09 | × | 12 | 24 | + | 10 | | | |
| 10 | ←→ | 14 | 25 | F L1 | 5L | | | |
| 11 | П→x 0 | 60 | 26 | 21 | 21 | | | |
| 12 | × | 12 | 27 | П→x 0 | 60 | | | |
| 13 | + | 10 | 28 | F $e^x$ | 16 | | | |
| 14 | В↑ | 0E | 29 | × | 12 | | | |

Инструкция

x В↑ n В/О С/П

Результат

$\varphi_n(x)$ — в рег. X

$H_n(x)$ — в рег. Y

Регистры

0 x

1;2 оперативные

Время вычисления — T = (6n + 5) с.
*Пример.* x = 2, n = 5. $\varphi_5(2) = -0{,}071346$, $H_5(2) = -16$.

## VI.1.3. ФУНКЦИИ ЭЙРИ

Функции Эйри являются решениями дифференциального уравнения $x'' - xy = 0$ [1].

Пара линейно независимых решений Ai (x) и Bi (x) этого уравнения может быть представлена в виде

$$A_1(x) = c_1 \cdot f_1(x) - c_2 \cdot x \cdot f_2(x),$$

$$B_1(x) = [c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x)] \cdot \sqrt{3}.$$

Функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ записываются в виде рядов

$$f_{1,2}(x) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{i} \frac{x^3}{3j\,(3j \mp 1)},$$

где в правой части знак «—» относится к $f_1(x)$, а «+» — к $f_2(x)$. $c_1$ и $c_2$ — численные коэффициенты, равные соответственно

$$c_1 = [3^{2/3} \cdot \Gamma(^2/_3)]^{-1} = 0{,}35502805,$$

$$c_2 = \left[3^{1/3} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^{-1} = 0{,}25881940.$$

Программа VI.1.3/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 1 | 41 | 26 | П→x 3 | 63 | 52 | 3 | 03 |
| 01 | B ↑ | 0E | 27 | П→x 5 | 65 | 53 | F $\sqrt{-}$ | 21 |
| 02 | x→П 3 | 43 | 28 | : | 13 | 54 | × | 12 |
| 03 | x→П 4 | 44 | 29 | П→x 5 | 65 | 55 | ←→ | 14 |
| 04 | F $x^2$ | 22 | 30 | 1 | 01 | 56 | П→x 6 | 66 |
| 05 | × | 12 | 31 | + | 10 | 57 | — | 11 |
| 06 | x→П 6 | 46 | 32 | : | 13 | 58 | С/П | 50 |
| 07 | 1 | 01 | 33 | П→x 6 | 66 | | | |
| 08 | x→П 2 | 42 | 34 | × | 12 | | Инструкция | |
| 09 | 0 | 00 | 35 | x→П 3 | 43 | | | |
| 10 | x→П 5 | 45 | 36 | П→x 4 | 64 | 0, 35502805 x→П 7 | | |
| 11 | ←→ | 14 | 37 | + | 10 | 0, 2588194 x→П 8 | | |
| 12 | П→x 2 | 62 | 38 | x→П 4 | 44 | x В/О С/П | | |
| 13 | П→x 6 | 66 | 39 | F Bx | 0 | | Результат | |
| 14 | × | 12 | 40 | — | 11 | | | |
| 15 | П→x 5 | 65 | 41 | F x=0 | 5E | Ai(x) — в рег. X | | |
| 16 | 3 | 03 | 42 | 11 | 11 | Bi(x) — в рег. Y | | |
| 17 | + | 10 | 43 | + | 10 | | | |
| 18 | x→П 5 | 45 | 44 | П→x 7 | 67 | | Регистры | |
| 19 | : | 13 | 45 | × | 12 | | | |
| 20 | П→x 5 | 65 | 46 | B ↑ | 0E | 1 x | | |
| 21 | 1 | 01 | 47 | П→x 4 | 64 | 2—6 оперативные | | |
| 22 | — | 11 | 48 | П→x 8 | 68 | 7 0,35502805 | | |
| 23 | : | 13 | 49 | × | 12 | 8 0,2588194 | | |
| 24 | x→П 2 | 42 | 50 | x→П 6 | 46 | | | |
| 25 | + | 10 | 51 | + | 10 | | | |

Время вычисления при $|x| \leqslant 5$ — 1 — 3 мин.

Абсолютная погрешность вычисления $\Delta$ при $|x| \leqslant 5$ не превышает $3 \cdot 10^{-5}$.

*Пример.* $x = -2$. $\widetilde{Ai}(-2) = 0{,}22740743$, $\widetilde{Bi}(-2) = -0{,}41230258$; точные значения $Ai(-2) = 0{,}22740743$, $Bi(-2) = -0{,}41230259$.

## VI.1.4. ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

### VI.1.4.1. ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД

Гипергеометрический ряд $F(a, в, c, x)$ (при $|x| < 1$; $c \neq 0, -1, -2, \ldots$) представляет собой частный случай решения дифференциального гипергеометрического уравнения

$$x(1-x)y'' + [c - (a+b+1)x]y' - aby = 0.$$

Для вычисления функции $F(a, в, c, x)$ используется представление приближенного значения $F(a, в, c, x)$ в виде ряда [14]

$$\widetilde{F}(a, b, c, x) = 1 + \sum_{i=1}^{N} \prod_{j=0}^{i-1} \frac{(a+j)(b+j)}{(1+j)(c+j)} x.$$

Программа VI.1.4.1/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P 2 | 21 | 40 | P , | 43 | 80 | ↑ | 06 |
| 01 | С/П | 78 | 41 | F 5 | 52 | 81 | F 6 | 62 |
| 02 | P 3 | 31 | 42 | ↑ | 06 | 82 | ←→ | 16 |
| 03 | С/П | 78 | 43 | F 8 | 82 | 83 | + | 96 |
| 04 | P 4 | 41 | 44 | + | 96 | 84 | P 6 | 61 |
| 05 | С/П | 78 | 45 | P , | 43 | 85 | — | 86 |
| 10 | P 5 | 51 | 50 | F 8 | 82 | 90 | P x=0 | 59 |
| 11 | 1 | 14 | 51 | 1 | 14 | 91 | P 2 | 21 |
| 12 | P 6 | 61 | 52 | + | 96 | 92 | F 6 | 62 |
| 13 | P 7 | 71 | 53 | P 8 | 81 | 93 | С/П | 78 |
| 14 | 0 | 04 | 54 | ↑ | 06 | | | |
| 15 | P 8 | 81 | 55 | P /—/ | 53 | | Инструкция | |
| 20 | F 3 | 32 | 60 | × | 26 | | | |
| 21 | ↑ | 06 | 61 | ↑ | 06 | | В/О x С/П a С/П в С/П c С/П | |
| 22 | F 8 | 82 | 62 | P /—/ | 53 | | | |
| 23 | + | 96 | 63 | ←→ | 16 | | | |
| 24 | P , | 43 | 64 | : | 36 | | Регистры | |
| 25 | F 4 | 42 | 65 | ↑ | 06 | | | |
| 30 | ↑ | 06 | 70 | F 2 | 22 | | 2 x | |
| 31 | F 8 | 82 | 71 | × | 26 | | 3 a | |
| 32 | + | 96 | 72 | ↑ | 06 | | 4 b | |
| 33 | ↑ | 06 | 73 | F 7 | 72 | | 5 c | |
| 34 | P /—/ | 53 | 74 | × | 26 | | 6 F | |
| 35 | × | 26 | 75 | P 7 | 71 | | 7;8 оперативные | |

Программа VI.1.4.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 0 | 40 | 18 | + | 10 | 36 | + | 10 |
| 01 | F . | 25 | 19 | П→x 1 | 61 | 37 | — | 11 |
| 02 | x→П C | 4C | 20 | П→x B | 6L | 38 | F x=0 | 5E |
| 03 | F . | 25 | 21 | + | 10 | 39 | 12 | 12 |
| 04 | x→П B | 4L | 22 | × | 12 | 40 | F Bx | 0 |
| 05 | ←→ | 14 | 23 | П→x 1 | 61 | 41 | С/П | 50 |
| 06 | x→П A | 4— | 24 | 1 | 01 | | | |
| 07 | 1 | 01 | 25 | + | 10 | | Инструкция | |
| 08 | x→П 2 | 42 | 26 | : | 13 | | | |
| 09 | 0 | 00 | 27 | П→x 1 | 61 | | a B↑ в B↑ с B↑ x | |
| 10 | Б П | 51 | 28 | П→x C | 6C | | В/О С/П | |
| 11 | 16 | 16 | 29 | + | 10 | | Регистры | |
| 12 | F Bx | 0 | 30 | : | 13 | | | |
| 13 | П→x 1 | 61 | 31 | П→x 0 | 60 | | 0—2 оперативные | |
| 14 | 1 | 01 | 32 | × | 12 | | A a | |
| 15 | + | 10 | 33 | П→x 2 | 62 | | B в | |
| 16 | x→П 1 | 41 | 34 | × | 12 | | C с | |
| 17 | П→x A | 6— | 35 | x→П 2 | 42 | | | |

Относительная погрешность $\delta$ не превышает $1 \cdot 10^{-6}$.

*Пример.* а = 1, в = 1, с = 1, x = 0,8.

$\widetilde{F}$ (1; 1; 1; 0,8) = 5, 000000; точное значение F (1; 1; 1; 0,8) = 5,0.

Время вычисления примера — 6—8 мин.

### VI.1.4.2. ВЫРОЖДЕННАЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Вырожденная гипергеометрическая функция $\Phi$ (a, c, x) является решением вырожденного гипергеометрического дифференциального уравнения [14]

$$x y'' + (c - x) y' - a y = 0$$

при $c \neq 0; -1, -2, \ldots$

Функция $\Phi$ (a, c, x) представляется приближенно в виде ряда

$$\widetilde{\Phi}(a, c, x) = 1 + \sum_{i=0}^{N} \prod_{j=0}^{i-1} \frac{a+j}{(1+j)(c+j)} x.$$

Программа VI.1.4.2/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P 2 | 21 | 32 | F 7 | 72 | 64 | ←→ | 16 |
| 01 | С/П | 78 | 33 | 1 | 14 | 65 | + | 96 |
| 02 | P 3 | 31 | 34 | + | 96 | 70 | P 5 | 51 |
| 03 | С/П | 78 | 35 | P 7 | 71 | 71 | — | 86 |
| 04 | P 4 | 41 | 40 | ↑ | 06 | 72 | P x=0 | 59 |
| 05 | 1 | 14 | 41 | P /—/ | 53 | 73 | F ←→ | 15 |
| 10 | P 5 | 51 | 42 | × | 26 | 74 | F 5 | 52 |
| 11 | P 6 | 61 | 43 | ↑ | 06 | 75 | С/П | 78 |
| 12 | 0 | 04 | 44 | P /—/ | 53 | | | |
| 13 | P 7 | 71 | 45 | ←→ | 16 | | Инструкция | |
| 14 | F 3 | 32 | 50 | : | 36 | | | |
| 15 | ↑ | 06 | 51 | ↑ | 06 | x B/O С/П a С/П c С/П | | |
| 20 | F 7 | 72 | 52 | F 2 | 22 | | | |
| 21 | + | 96 | 53 | × | 26 | | Регистры | |
| 22 | P , | 43 | 54 | ↑ | 06 | | | |
| 23 | F 4 | 42 | 55 | F 6 | 62 | 2 | x | |
| 24 | ↑ | 06 | 60 | × | 26 | 3 | a | |
| 25 | F 7 | 72 | 61 | P 6 | 61 | 4 | c | |
| 30 | + | 96 | 62 | ↑ | 06 | 5 | Ф(a, c, x) | |
| 31 | P , | 43 | 63 | F 5 | 52 | 6;7 | оперативные | |

Программа VI.1.4.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 0 | 40 | 16 | + | 10 | 32 | F x=0 | 5E |
| 01 | F . | 25 | 17 | П→x 1 | 61 | 33 | 10 | 10 |
| 02 | x→П C | 4C | 18 | П→x C | 6C | 34 | F Bx | 0 |
| 03 | ←→ | 14 | 19 | + | 10 | 35 | С/П | 50 |
| 04 | x→П A | 4— | 20 | : | 13 | | | |
| 05 | 1 | 01 | 21 | 1 | 01 | | | |
| 06 | x→П 2 | 42 | 22 | П→x 1 | 61 | | Инструкция | |
| 07 | 0 | 00 | 23 | + | 10 | | | |
| 08 | БП | 51 | 24 | : | 13 | a B↑ c B↑ x B/O С/П | | |
| 09 | 14 | 14 | 25 | П→x 0 | 60 | | | |
| 10 | F Bx | 0 | 26 | × | 12 | | Регистры | |
| 11 | П→x 1 | 61 | 27 | П→x 2 | 62 | | | |
| 12 | 1 | 01 | 28 | × | 12 | 0 | x | |
| 13 | + | 10 | 29 | x→П 2 | 42 | 1;2 | оперативные | |
| 14 | x→П 1 | 41 | 30 | + | 10 | A | a | |
| 15 | П→x A | 6— | 31 | — | 11 | C | c | |

*Пример*. a = 1, c = 1, x = 5, $\widetilde{\Phi}$ (1; 1; 5) = 148, 413.
Время вычисления примера — 2 — 3 мин.

# VI.2. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ

## VI.2.1. ГАММА-ФУНКЦИЯ И РОДСТВЕННЫЕ ЕЙ ФУНКЦИИ

### VI.2.1.1. ГАММА-ФУНКЦИЯ

Гамма-функция $\Gamma(x)$ определяется как решение функционального уравнения [13]

$$\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x) \text{ при } \Gamma(1) = 1.$$

Для $x > 0$ имеет место представление

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

#### VI.2.1.1.1. Вычисление значения Γ(x) на интервале $-66 \leqslant x \leqslant 70$ с использованием представления Стирлинга

Для вычисления $\Gamma(x)$ удобным оказывается приближенное представление Стирлинга

$$\tilde{\Gamma}(x+1) \simeq \left(\frac{x}{e}\right)^x e^{\frac{1}{12x}} \cdot \sqrt{2\pi x}, \quad x \geqslant 9.$$

Рекуррентным преобразованием $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ это соотношение можно распространить на все допустимые значения x.

Программа VI.2.1.1.1/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P 3 | 31 | 32 | P ln | 13 | 64 | P π | 23 |
| 01 | P 4 | 41 | 33 | 1 | 14 | 65 | 2 | 24 |
| 02 | 1 | 14 | 34 | — | 86 | 70 | × | 26 |
| 03 | P 2 | 21 | 35 | ↑ | 06 | 71 | ↑ | 06 |
| 04 | F 2 | 22 | 40 | F 5 | 52 | 72 | F 5 | 52 |
| 05 | ↑ | 06 | 41 | × | 26 | 73 | × | 26 |
| 10 | F 3 | 32 | 42 | P , | 43 | 74 | F ) | 65 |
| 11 | P 5 | 51 | 43 | F 5 | 52 | 75 | ↑ | 06 |
| 12 | : | 36 | 44 | 1 | 14 | 80 | P /— | 53 |
| 13 | P 2 | 21 | 45 | 2 | 24 | 81 | × | 26 |
| 14 | F 3 | 32 | 50 | × | 26 | 82 | С/П | 78 |
| 15 | 1 | 14 | 51 | F 1/x | 45 | | | |
| 20 | + | 96 | 52 | ↑ | 06 | | Инструкция | |
| 21 | P 3 | 31 | 53 | P /—/ | 53 | | | |
| 22 | F 5 | 52 | 54 | + | 96 | | x В/О С/П | |
| 23 | 9 | 94 | 55 | P $e^x$ | 33 | | | |
| 24 | — | 86 | 60 | ↑ | 06 | | Регистры | |
| 25 | P $x \geqslant 0$ | 49 | 61 | F 2 | 22 | | | |
| 30 | F ↑ | 05 | 62 | × | 26 | | 2—5 оперативные | |
| 31 | F 5 | 52 | 63 | P , | 43 | | | |

Программа VI.2.1.1.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | К НОП | 54 | 16 | F . | 25 | 32 | 2 | 02 |
| 01 | 1 | 01 | 17 | П→x 6 | 66 | 33 | × | 12 |
| 02 | ←→ | 14 | 18 | 1 | 01 | 34 | П→x 6 | 66 |
| 03 | B ↑ | 0E | 19 | 2 | 02 | 35 | × | 12 |
| 04 | F . | 25 | 20 | × | 12 | 36 | F $y^{-}$ | 21 |
| 05 | x→П 6 | 46 | 21 | F 1/x | 23 | 37 | × | 12 |
| 06 | : | 13 | 22 | П→x 6 | 66 | 38 | С/П | 50 |
| 07 | 1 | 01 | 23 | F ln | 18 | | | |
| 08 | П→x 6 | 66 | 24 | 1 | 01 | | Инструкция | |
| 09 | + | 10 | 25 | — | 11 | | | |
| 10 | 9 | 09 | 26 | П→x 6 | 66 | | x B/O С/П | |
| 11 | П→x 6 | 66 | 27 | × | 12 | | | |
| 12 | — | 11 | 28 | + | 10 | | Регистр | |
| 13 | F x<0 | 5C | 29 | F $e^x$ | 16 | | | |
| 14 | 04 | 04 | 30 | × | 12 | | 6 оперативный | |
| 15 | F . | 25 | 31 | F π | 20 | | | |

$$\text{Время вычисления} — T = \begin{cases} 13\,\text{с} & \text{при } x > 9, \\ (40 - 3x)\,\text{с} & \text{при } x \leqslant 9. \end{cases}$$

Относительная погрешность $\delta$ не превышает $1 \cdot 10^{-5}$.

*Пример.* $x = -3{,}5$. $\tilde{\Gamma}(-3{,}5) = 0{,}27009$; точное значение $\Gamma(-3{,}5) = 0{,}270088$.

### VI.2.1.1.2. Вычисление приближенного значения Г(x) при x>0 по формуле [7]

$$\Gamma(x) = \frac{e^{\frac{x(x-1)}{2}}}{x}, \quad 0 < x \leqslant 1.$$

При $x > 1$ рекуррентным преобразованием $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ значение x переводится в область $0 < x \leqslant 1$.

Программа VI.2.1.1.2/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P 2 | 21 | 15 | P 4 | 41 | 34 | ↑ | 06 |
| 01 | P 3 | 31 | 20 | 1 | 14 | 35 | F 3 | 32 |
| 02 | F $x^2$ | 55 | 21 | — | 86 | 40 | × | 26 |
| 03 | F 1/x | 45 | 22 | P 2 | 21 | 41 | С/П | 78 |
| 04 | P 4 | 41 | 23 | P x<0 | 69 | | | |
| 05 | F 3 | 32 | 24 | ↑ | 06 | | Инструкция | |
| 10 | ↑ | 06 | 25 | ↑ | 06 | | | |
| 11 | F 4 | 42 | 30 | F 4 | 42 | | x B/O С/П | |
| 12 | × | 26 | 31 | × | 26 | | | |
| 13 | P 3 | 31 | 32 | P $e^x$ | 33 | | Регистры | |
| 14 | F 2 | 22 | 33 | F $y^{-}$ | 65 | | 2—4 оперативные | |

Программа VI.2.1.1.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | В↑ | 0E | 07 | F . | 25 | 14 | F $e^x$ | 16 |
| 01 | В↑ | 0E | 08 | F . | 25 | 15 | F $\sqrt{\ }$ | 21 |
| 02 | F $x^2$ | 22 | 09 | 1 | 01 | 16 | × | 12 |
| 03 | F 1/x | 23 | 10 | — | 11 | 17 | С/П | 50 |
| 04 | ←→ | 14 | 11 | F x<0 | 5C | | | |
| 05 | F . | 25 | 12 | 05 | 05 | | Инструкция | |
| 06 | × | 12 | 13 | × | 12 | | x В/О С/П | |

Время вычисления $T = 2\,(x + 3)$ с.

Относительная погрешность вычисления $\delta$ не превышает 1 %.

*Пример.* $x = 4{,}5$. $\widetilde{\Gamma}(4{,}5) = 11{,}5828$; точное значение $\Gamma(4{,}5) = 11{,}6317$.

## VI.2.1.2. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ПРОИЗВОДНАЯ ГАММА-ФУНКЦИИ

Логарифмическая производная гамма-функции $\psi(x)$ представляется как [11]:

$$\psi(x) = \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

Для вычисления $\psi(x)$ представляется приближенно в виде ряда

$$\widetilde{\psi}(x) = -C + (x-1)\left[\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{i\,(i+x-1)} + \frac{1}{N+\frac{x}{2}}\right], \quad N = 9,$$

где $C = 0{,}5772157$ — постоянная Эйлера.

Программа VI.2.1.2/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | ↑ | 06 | 24 | × | 26 | 52 | ↑ | 06 |
| 01 | 1 | 14 | 25 | F 1/x | 45 | 53 | F 5 | 52 |
| 02 | — | 86 | 30 | ↑ | 06 | 54 | — | 86 |
| 03 | P 4 | 41 | 31 | F 3 | 32 | 55 | С/П | 78 |
| 04 | ←→ | 16 | 32 | + | 96 | | | |
| 05 | 2 | 24 | 33 | P 3 | 31 | | Инструкция | |
| 10 | : | 36 | 34 | F 2 | 22 | | | |
| 11 | 9 | 94 | 35 | 1 | 14 | | 0,5772157 P 5 | |
| 12 | P 2 | 21 | 40 | — | 86 | | x В/О С/П | |
| 13 | + | 96 | 41 | P 2 | 21 | | | |
| 14 | F 1/x | 45 | 42 | P x=0 | 59 | | Регистры | |
| 15 | P 3 | 31 | 43 | F 2 | 22 | | | |
| 20 | F 2 | 22 | 44 | F 4 | 42 | | 2;3 оперативные | |
| 21 | ↑ | 06 | 45 | ↑ | 06 | 4 | x—1 | |
| 22 | F 4 | 42 | 50 | F 3 | 32 | 5 | 0,5772157 | |
| 23 | + | 96 | 51 | × | 26 | | | |

Программа VI.2.1.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 1 | 41 | 11 | П→x 2 | 62 | 22 | С/П | 50 |
| 01 | 1 | 01 | 12 | + | 10 | | | |
| 02 | — | 11 | 13 | F Bx | 0 | | Инструкция | |
| 03 | 9 | 09 | 14 | × | 12 | | | |
| 04 | x→П 2 | 42 | 15 | F 1/x | 23 | | 0,5772157 x→П 3 | |
| 05 | П→x 1 | 61 | 16 | + | 10 | | x В/О С/П | |
| 06 | 2 | 02 | 17 | F L2 | 58 | | | |
| 07 | : | 13 | 18 | 10 | 10 | | Регистры | |
| 08 | + | 10 | 19 | × | 12 | 1 | x | |
| 09 | F 1/x | 23 | 20 | П→x 3 | 63 | 2 | оперативный | |
| 10 | ←→ | 14 | 21 | — | 11 | 3 | 0,5772157 | |

Время вычисления — 25 с.

Абсолютная погрешность вычисления $\Delta$ при $1 \leqslant x \leqslant 2$ не превышает $5 \cdot 10^{-5}$.

*Пример.* $x = 1{,}5$. $\widetilde{\psi}(1{,}5) = 0{,}03652$; точное значение $\psi(1{,}5) = 0{,}03649$.

### VI.2.1.3. ФУНКЦИЯ β(x)

Функция $\beta(x)$ определяется через пару логарифмических производных гамма-функции $\psi(x)$ как

$$\beta(x) = \frac{1}{2}\left[\psi\left(\frac{x+1}{2}\right) - \psi\left(\frac{x}{2}\right)\right].$$

Для вычисления используется приближенное представление $\beta(x)$ в виде ряда [28]

$$\beta(x) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{(2i+x-2)(2i+x-1)} + \frac{1}{4N+2x-1}, \quad N = 9.$$

Программа VI.2.1.3/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | ↑ | 06 | 22 | — | 86 | 44 | P x=0 | 59 |
| 01 | 1 | 14 | 23 | 1 | 14 | 45 | P 2 | 21 |
| 02 | 8 | 84 | 24 | — | 86 | 50 | F 4 | 42 |
| 03 | P 3 | 31 | 25 | P 2 | 21 | 51 | С/П | 78 |
| 04 | + | 96 | 30 | × | 26 | | | |
| 05 | P 2 | 21 | 31 | F 1/x | 45 | | Инструкция | |
| 10 | 2 | 24 | 32 | ↑ | 06 | | | |
| 11 | × | 26 | 33 | F 4 | 42 | | x В/О С/П | |
| 12 | 1 | 14 | 34 | + | 96 | | | |
| 13 | — | 86 | 35 | P 4 | 41 | | Регистры | |
| 14 | F 1/x | 45 | 40 | P 3 | 32 | | | |
| 15 | P 4 | 41 | 41 | 2 | 24 | | 2;3 оперативные | |
| 20 | F 2 | 22 | 42 | — | 86 | 4 | β | |
| 21 | 1 | 14 | 43 | P 3 | 31 | | | |

Программа VI.2.1.3/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | В↑ | 0E | 11 | F 1/x | 23 | 22 | F L1 | 5L |
| 01 | 9 | 09 | 12 | П→x 2 | 62 | 23 | 12 | 12 |
| 02 | x→П 1 | 41 | 13 | 1 | 01 | 24 | С/П | 50 |
| 03 | В↑ | 0E | 14 | — | 11 | | | |
| 04 | + | 10 | 15 | П→x 2 | 62 | | Инструкция | |
| 05 | + | 10 | 16 | 2 | 02 | | | |
| 06 | x→П 2 | 42 | 17 | — | 11 | | x В/О С/П | |
| 07 | В↑ | 0E | 18 | x→П 2 | 42 | | | |
| 08 | + | 10 | 19 | × | 12 | | Регистры | |
| 09 | 1 | 01 | 20 | F 1/x | 23 | | | |
| 10 | — | 11 | 21 | + | 10 | | 1;2 оперативные | |

Время вычисления — 30 — 40 с.

Абсолютная погрешность вычисления $\Delta$ не превышает $1 \cdot 10^{-4}$.

*Пример.* x = 2. $\widetilde{\beta}$ (2) = 0,30687; точное значение $\beta$ (2) = = 0,306845.

### VI.2.1.4. БЕТА-ФУНКЦИЯ

Бета-функция B (x, y) при $x > 0$, $y > 0$ имеет представление [11]

$$B(x,\ y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$$

и определяется с помощью гамма-функций:

$$B(x,\ y) = \frac{\Gamma(x)\cdot\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

#### VI.2.1.4.1. x, y — произвольные

При произвольных значениях x, y ($x > 0$, $y > 0$) используется представление приближенного значения гамма-функции как $\widetilde{\Gamma}(x) = = \exp[x(x-1)/2]/x$ ($0 < x \leqslant 1$), а в случае $x > 1$ рекуррентным преобразованием $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$ значение x переводится в область $0 < x \leqslant 1$.

Программа VI.2.1.4.1/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | Р 5 | 51 | 05 | F : | 35 | 14 | Р 7 | 71 |
| 01 | ←→ | 16 | 10 | Р 8 | 81 | 15 | F 4 | 42 |
| 02 | Р 4 | 41 | 11 | F 5 | 52 | 20 | ПП | 68 |
| 03 | + | 96 | 12 | ПП | 68 | 21 | F : | 35 |
| 04 | ПП | 68 | 13 | F : | 35 | 22 | Р 6 | 61 |

*Продолжение*

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 23 | ↑ | 06 | 50 | × | 26 | 73 | F 3 | 32 |
| 24 | F 7 | 72 | 51 | P 3 | 31 | 74 | × | 26 |
| 25 | × | 26 | 52 | F 2 | 22 | 75 | В/О | 48 |
| 30 | ↑ | 06 | 53 | P 6 | 61 | | | |
| 31 | F 8 | 82 | 54 | 1 | 14 | | Инструкция | |
| 32 | : | 36 | 55 | — | 86 | | | |
| 33 | С/П | 78 | 60 | P 2 | 21 | | x ↑ y В/О С/П | |
| 34 | P 2 | 21 | 61 | P x<0 | 69 | | Регистры | |
| 35 | P 3 | 31 | 62 | 4 | 44 | | | |
| 40 | F $x^2$ | 55 | 63 | ↑ | 06 | | 2;3 оперативные | |
| 41 | F 1/x | 45 | 64 | F 6 | 62 | | 4 x | |
| 42 | P 6 | 61 | 65 | × | 26 | | 5 y | |
| 43 | F 3 | 32 | 70 | P $e^x$ | 33 | | 6 Г(x) | |
| 44 | ↑ | 06 | 71 | F $\sqrt{}$ | 65 | | 7 Г(y) | |
| 45 | F 6 | 62 | 72 | ↑ | 06 | | 8 Г(x+y) | |

Программа VI.2.1.4.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 1 | 41 | 17 | П→x 0 | 60 | 34 | F $e^x$ | 16 |
| 01 | ←→ | 14 | 18 | : | 13 | 35 | F $\sqrt{}$ | 21 |
| 02 | x→П 0 | 40 | 19 | С/П | 50 | 36 | × | 12 |
| 03 | ПП | 53 | 20 | x→П 3 | 43 | 37 | В/О | 52 |
| 04 | 20 | 20 | 21 | F 1/x | 23 | | | |
| 05 | x→П 2 | 42 | 22 | БП | 51 | | Инструкция | |
| 06 | П→x 0 | 60 | 23 | 27 | 27 | | | |
| 07 | П→x 1 | 61 | 24 | x→П 3 | 43 | | x В↑ y В О С/П | |
| 08 | + | 10 | 25 | F . | 25 | | | |
| 09 | ПП | 53 | 26 | × | 12 | | Регистры | |
| 10 | 20 | 20 | 27 | П→x 3 | 63 | | | |
| 11 | x→П 0 | 40 | 28 | П→x 3 | 63 | | 0 x; Г(x+y) | |
| 12 | П→x 1 | 61 | 29 | 1 | 01 | | 1 y | |
| 13 | ПП | 53 | 30 | — | 11 | | 2 Г(y) | |
| 14 | 20 | 20 | 31 | F x<0 | 5C | | 3 оперативный | |
| 15 | П→x 2 | 62 | 32 | 24 | 24 | | | |
| 16 | × | 12 | 33 | × | 12 | | | |

Время вычисления — $T = 5 (x + y + 5)$ с.

Относительная погрешность вычисления $\delta$ не превышает 2 %.

*Пример*. x = 2,5; y = 4. $\widetilde{B}$ (2, 5; 4) = 0,0277056; точное значение B (2,5; 4) = 0,027705627.

## VI.2.1.4.2. x, y — целые и полуцелые

Для вычисления B (x, y) при целых и полуцелых значениях x, y ($x = n/2$, $y = m/2$; n, m — целые числа) используется точное представление гамма-функции.

Программа VI.2.1.4.2/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P 3 | 31 | 25 | P 4 | 41 | 54 | P $e^x$ | 33 |
| 01 | ←→ | 16 | 30 | С/П | 78 | 55 | ↑ | 06 |
| 02 | P 2 | 21 | 31 | ↑ | 06 | 60 | F 4 | 42 |
| 03 | + | 96 | 32 | F 4 | 42 | 61 | × | 26 |
| 04 | 1 | 14 | 33 | × | 26 | 62 | В/О | 48 |
| 05 | P 4 | 41 | 34 | P 4 | 41 | | | |
| 10 | ←→ | 16 | 35 | ←→ | 16 | | Инструкция | |
| 11 | ПП | 68 | 40 | 1 | 14 | | | |
| 12 | P 4 | 41 | 41 | — | 86 | | x ↑ y В/О С/П | |
| 13 | F 1/x | 45 | 42 | P x≠0 | 79 | | | |
| 14 | P 4 | 41 | 43 | P 5 | 51 | | Регистры | |
| 15 | F 2 | 22 | 44 | P x<0 | 69 | | | |
| 20 | ПП | 68 | 45 | F 3 | 32 | | 2 x | |
| 21 | P 4 | 41 | 50 | ↑ | 06 | | 3 y | |
| 22 | P 4 | 41 | 51 | P π | 23 | | 4 оперативный | |
| 23 | F 3 | 32 | 52 | P ln | 13 | | | |
| 24 | ПП | 68 | 53 | × | 26 | | | |

Программа VI.2.1.4.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | ←→ | 14 | 13 | ПП | 53 | 26 | × | 12 |
| 01 | x→П 1 | 41 | 14 | 19 | 19 | 27 | F $e^x$ | 16 |
| 02 | F Bx | 0 | 15 | С/П | 50 | 28 | × | 12 |
| 03 | + | 10 | 16 | / — / | 0L | 29 | В О | 52 |
| 04 | 1 | 01 | 17 | × | 12 | | | |
| 05 | ←→ | 14 | 18 | F Bx | 0 | | Инструкция | |
| 06 | ПП | 53 | 19 | 1 | 01 | | | |
| 07 | 19 | 19 | 20 | — | 11 | | x В↑ y В/О С/П | |
| 08 | F 1/x | 23 | 21 | / — / | 0L | | | |
| 09 | П→x 1 | 61 | 22 | F x≥0 | 59 | | Регистр | |
| 10 | ПП | 53 | 23 | 16 | 16 | | | |
| 11 | 19 | 19 | 24 | F π | 20 | | 1 x | |
| 12 | ←→ | 14 | 25 | F ln | 18 | | | |

Время вычисления — $T = 4\,(x + y + 4)$ с.

*Пример*. x = 1,5, y = 4. B (1, 5; 4) = 0,101587.

## VI.2.1.4.3. Вычисление $\tilde{B}$ (x, y) с использованием представления гамма-функции по формуле Стирлинга

Программа VI.2.1.4.3/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 2 | 42 | 24 | x→П 6 | 46 | 48 | F $e^x$ | 16 |
| 01 | ←→ | 14 | 25 | : | 13 | 49 | × | 12 |
| 02 | x→П 1 | 41 | 26 | 1 | 01 | 50 | F π | 20 |
| 03 | + | 10 | 27 | П→x 6 | 66 | 51 | 2 | 02 |
| 04 | ПП | 53 | 28 | + | 10 | 52 | × | 12 |
| 05 | 20 | 20 | 29 | 9 | 09 | 53 | П→x 6 | 66 |
| 06 | x→П 5 | 45 | 30 | П→x 6 | 66 | 54 | × | 12 |
| 07 | П→x 1 | 61 | 31 | — | 11 | 55 | F $y^-$ | 21 |
| 08 | ПП | 53 | 32 | F x<0 | 5C | 56 | × | 12 |
| 09 | 20 | 20 | 33 | 23 | 23 | 57 | В/О | 52 |
| 10 | x→П 3 | 43 | 34 | F . | 25 | | | |
| 11 | П→x 2 | 62 | 35 | F . | 25 | | Инструкция | |
| 12 | ПП | 53 | 36 | П→x 6 | 66 | | | |
| 13 | 20 | 20 | 37 | 1 | 01 | x В↑ y В/О С/П | | |
| 14 | x→П 4 | 44 | 38 | 2 | 02 | | | |
| 15 | П→x 3 | 63 | 39 | × | 12 | | Регистры | |
| 16 | × | 12 | 40 | F 1/x | 23 | | | |
| 17 | П→x 5 | 65 | 41 | П→x 6 | 66 | 1 | x | |
| 18 | : | 13 | 42 | F ln | 18 | 2 | y | |
| 19 | С/П | 50 | 43 | 1 | 01 | 3 | Г(x) | |
| 20 | 1 | 01 | 44 | — | 11 | 4 | Г(y) | |
| 21 | ←→ | 14 | 45 | П→x 6 | 66 | 5 | Г(x+y) | |
| 22 | В↑ | 0E | 46 | × | 12 | 6 | оперативный | |
| 23 | F . | 25 | 47 | + | 10 | | | |

*Пример.* x = 4, y = 1,5. $\tilde{B}$ (4; 1,5) = 0,10158753; точное значение B (4; 1,5), = 0,1015873.

Время вычисления примера — 2,5 мин.

### VI.2.1.5. НЕПОЛНАЯ ГАММА-ФУНКЦИЯ

Неполная гамма-функция $\gamma$ (a, x) определяется как [11]

$$\gamma(a,\ x) = \int_0^x e^{-t} \cdot t^{a-1}\, dt,\ x \geqslant 0,\ a > 0.$$

Для вычисления используется представление $\gamma$ (a, x) в виде ряда

$$\tilde{\gamma}(a.\ x) = e^{-x} \cdot \frac{x^a}{a}\left(1 + \sum_{i=0}^{N}\prod_{j=1}^{i}\frac{x}{a+j}\right),\ a \neq 0,\ -1,\ -2,\ \ldots$$

## VI.2.1.5.1. Вычисление $\tilde{\gamma}(a, x)$ при фиксированном числе слагаемых в сумме $N = int(9 + 2x)$

Программа VI.2.1.5.1/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P 3 | 31 | 32 | 0 | 04 | 64 | P 4 | 41 |
| 01 | ←→ | 16 | 33 | P 7 | 71 | 65 | F 5 | 52 |
| 02 | P 2 | 21 | 34 | F 7 | 72 | 70 | 1 | 14 |
| 03 | P ln | 13 | 35 | 1 | 14 | 71 | — | 86 |
| 04 | × | 26 | 40 | + | 96 | 72 | P 5 | 51 |
| 05 | ↑ | 06 | 41 | P 7 | 71 | 73 | P x<0 | 69 |
| 10 | F 2 | 22 | 42 | ↑ | 06 | 74 | F : | 35 |
| 11 | — | 86 | 43 | F 3 | 32 | 75 | F 4 | 42 |
| 12 | P $e^x$ | 33 | 44 | + | 96 | 80 | С/П | 78 |
| 13 | ↑ | 06 | 45 | ↑ | 06 | | | |
| 14 | F 3 | 32 | 50 | F 2 | 22 | | Инструкция | |
| 15 | : | 36 | 51 | ←→ | 16 | | | |
| 20 | P 4 | 41 | 52 | : | 36 | x ↑ a В/О С/П | | |
| 21 | P 6 | 61 | 53 | ↑ | 06 | | | |
| 22 | F 2 | 22 | 54 | F 6 | 62 | | Регистры | |
| 23 | 2 | 24 | 55 | × | 26 | | | |
| 24 | × | 26 | 60 | P 6 | 61 | 2 | x | |
| 25 | 9 | 94 | 61 | ↑ | 06 | 3 | a | |
| 30 | + | 96 | 62 | F 4 | 42 | 4 | γ | |
| 31 | P 5 | 51 | 63 | + | 96 | 5;6 | оперативные | |

Программа VI.2.1.5.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 1 | 41 | 12 | × | 12 | 24 | F $e^x$ | 16 |
| 01 | ←→ | 14 | 13 | П→x 1 | 61 | 25 | : | 13 |
| 02 | В ↑ | 0E | 14 | F 1/x | 23 | 26 | С/П | 50 |
| 03 | В ↑ | 0E | 15 | + | 10 | | | |
| 04 | + | 10 | 16 | F L2 | 58 | | Инструкция | |
| 05 | 9 | 09 | 17 | 08 | 08 | | | |
| 06 | + | 10 | 18 | F . | 25 | x В ↑ a В/О С/П | | |
| 07 | x→П 2 | 42 | 19 | F . | 25 | | | |
| 08 | П→x 1 | 61 | 20 | F ln | 18 | | Регистры | |
| 09 | П→x 2 | 62 | 21 | П→x 1 | 61 | | | |
| 10 | + | 10 | 22 | × | 12 | 1 | a | |
| 11 | : | 13 | 23 | — | 11 | 2 | оперативный | |

Время вычисления — $T = 6\ (x + 5)$ с.

Относительная погрешность вычисления $\delta$ не превышает $1 \cdot 10^{-5}$.

*Пример.* $a = 3$, $x = 5$. $\tilde{\gamma}(3;\ 5) = 1{,}75070$; точное значение $\gamma(3;\ 5) = 1{,}750696$.

## VI.2.1.5.2. Вычисление $\tilde{\gamma}(a, x)$ до машинного нуля

Программа VI.2.1.5.2/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P 3 | 31 | 31 | ↑ | 06 | 62 | — | 86 |
| 01 | F 1/x | 45 | 32 | F 6 | 62 | 63 | P $e^x$ | 33 |
| 02 | P 4 | 41 | 33 | × | 26 | 64 | ↑ | 06 |
| 03 | P 6 | 61 | 34 | P 6 | 61 | 65 | F 4 | 42 |
| 04 | ←→ | 16 | 35 | ↑ | 06 | 70 | × | 26 |
| 05 | P 2 | 21 | 40 | F 4 | 42 | 71 | С/П | 78 |
| 10 | 0 | 04 | 41 | ←→ | 16 | | | |
| 11 | P 5 | 51 | 42 | + | 96 | | | |
| 12 | F 5 | 52 | 43 | P 4 | 41 | | Инструкция | |
| 13 | 1 | 14 | 44 | — | 86 | | | |
| 14 | + | 96 | 45 | P x=0 | 59 | | x ↑ a В/О С/П | |
| 15 | P 5 | 51 | 50 | P ←→ | 13 | | | |
| 20 | ↑ | 06 | 51 | F 2 | 22 | | Регистры | |
| 21 | F 3 | 32 | 52 | P 1п | 13 | | | |
| 22 | + | 96 | 53 | ↑ | 06 | | 2 *x* | |
| 23 | F 1/x | 45 | 54 | F 3 | 32 | | 3 *a* | |
| 24 | ↑ | 06 | 55 | × | 26 | | 4—6 оперативные | |
| 25 | F 2 | 22 | 60 | ↑ | 06 | | | |
| 30 | × | 26 | 61 | F 2 | 22 | | | |

Программа VI.2.1.5.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 1 | 41 | 14 | П→x 2 | 62 | 28 | 13 | 13 |
| 01 | ←→ | 14 | 15 | П→x 0 | 60 | 29 | + | 10 |
| 02 | x→П 0 | 40 | 16 | × | 12 | 30 | С/П | 50 |
| 03 | F 1п | 18 | 17 | П→x 3 | 63 | | | |
| 04 | × | 12 | 18 | 1 | 01 | | Инструкция | |
| 05 | П→x 0 | 60 | 19 | + | 10 | | | |
| 06 | — | 11 | 20 | x→П 3 | 43 | | x В↑ a В/О С/П | |
| 07 | F $e^x$ | 16 | 21 | П→x 1 | 61 | | | |
| 08 | 0 | 00 | 22 | + | 10 | | Регистры | |
| 09 | ←→ | 14 | 23 | : | 13 | | | |
| 10 | 0 | 00 | 24 | x→П 2 | 42 | | 0 x | |
| 11 | БП | 51 | 25 | + | 10 | | 1 a | |
| 12 | 20 | 20 | 26 | — | 11 | | 2;3 оперативные | |
| 13 | F Bx | 0 | 27 | Fx=0 | 5E | | | |

Время вычисления — $T = 12(x + 5)$ с.

Относительная погрешность вычисления $\delta$ не превышает $1 \cdot 10^{-6}$.

*Пример.* $a = 1$, $x = 3$. $\tilde{\gamma}(1;3) = 0{,}950212$; точное значение $\gamma(1; 3) = 0{,}9502129$.

## VI.2.2. ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ФУНКЦИИ

### VI.2.2.1. ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ $J_k(x)$ И $I_k(x)$

Функция Бесселя $J_к(x)$ определяется как [11]

$$J_k(x) = \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^k}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(k+{}^1/_2)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x\cos t)\cdot\sin^{2k} t\,dt,$$

а модифицированная функция Бесселя $I_к(x)$ связана с $J_к(x)$ соотношением

$$I_k(x) = i^{-k}\cdot J_k(ix).$$

Функции $J_к(x)$ и $I_к(x)$ могут быть представлены в виде ряда

$$J_k(x);\ I_k(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\mp 1)^t \left(\frac{x}{2}\right)^{k+2i}}{i!\ \Gamma(k+i+1)},$$

где в правой части знак минус относится к $J_k(x)$, а знак плюс относится к $I_к(x)$.

#### VI.2.2.1.1. Вычисления $J_k(x)$ и $I_k(x)$ при целых значениях

Для вычисления используется разложение $J_k(x)$ и $I_k(x)$ в ряд и представление $\Gamma(k+i+1) = (k+i)!$. В зависимости от предварительной установки в регистре памяти 7 значения $-1$ или $+1$ по программе вычисляется соответственно $J_k(x)$ или $I_k(x)$.

Программа VI.2.2.1.1/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Комачда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P 3 | 31 | 21 | F 4 | 42 | 42 | 1 | 14 |
| 01 | ←→ | 16 | 22 | ↑ | 06 | 43 | + | 96 |
| 02 | 2 | 24 | 23 | F 4 | 42 | 44 | P 5 | 51 |
| 03 | : | 36 | 24 | : | 36 | 45 | ↑ | 06 |
| 04 | P 2 | 21 | 25 | F 1/x | 45 | 50 | F 3 | 32 |
| 05 | 0 | 04 | 30 | P 4 | 41 | 51 | + | 96 |
| 10 | P 5 | 51 | 31 | P 6 | 61 | 52 | × | 26 |
| 11 | F 3 | 32 | 32 | ←→ | 16 | 53 | ↑ | 96 |
| 12 | ←→ | 16 | 33 | 1 | 14 | 54 | F 2 | 22 |
| 13 | $x^y$ | 38 | 34 | — | 86 | 55 | F $x^2$ | 55 |
| 14 | P 4 | 41 | 35 | БП | 58 | 60 | ←→ | 16 |
| 15 | ←→ | 16 | 40 | P 2 | 21 | 61 | : | 36 |
| 20 | P x≠0 | 79 | 41 | F 5 | 52 | 62 | ↑ | 06 |

*Продолжение*

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|
| 63 | F 7 | 72 | 81 | F 5 | 52 |
| 64 | × | 26 | 82 | ↑ | 06 |
| 65 | ↑ | 06 | 83 | F 2 | 22 |
| 70 | F 4 | 42 | 84 | — | 86 |
| 71 | × | 26 | 85 | 9 | 94 |
| 72 | P 4 | 41 | 90 | — | 86 |
| 73 | ↑ | 06 | 91 | P x⩾0 | 49 |
| 74 | F 6 | 62 | 92 | F 4 | 42 |
| 75 | + | 96 | 93 | F 6 | 62 |
| 80 | P 6 | 61 | 94 | С/П | 78 |

Инструкция

В рег. 7 { —1 для J; 1 для I

x ↑ k В/О С/П

Регистры

2 x/2
3 k
4;5 оперативные
6 J или I
7 —1 или 1

Программа VI.2.2.1.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 2 | 42 | 17 | П→x 1 | 61 | 34 | F L1 | 5L |
| 01 | ←→ | 14 | 18 | F x² | 22 | 35 | 25 | 25 |
| 02 | 2 | 02 | 19 | П→x 7 | 67 | 36 | С/П | 50 |
| 03 | : | 13 | 20 | × | 12 | | | |
| 04 | x→П 1 | 41 | 21 | П→x 1 | 61 | | | |
| 05 | F ln | 18 | 22 | 8 | 08 | | | |
| 06 | × | 12 | 23 | + | 10 | | | |
| 07 | F $e^x$ | 16 | 24 | x→П 1 | 41 | | | |
| 08 | П→x 2 | 62 | 25 | П→x 1 | 61 | | | |
| 09 | ВП | 0С | 26 | П→x 2 | 62 | | | |
| 10 | x→П 3 | 43 | 27 | + | 10 | | | |
| 11 | F . | 25 | 28 | : | 13 | | | |
| 12 | П→x 3 | 63 | 29 | П→x 1 | 61 | | | |
| 13 | : | 13 | 30 | : | 13 | | | |
| 14 | F L3 | 5— | 31 | × | 12 | | | |
| 15 | 12 | 12 | 32 | П→x 3 | 63 | | | |
| 16 | x→П 3 | 43 | 33 | + | 10 | | | |

Инструкция

В рег. 7 { —1 для J; 1 для I

x В ↑ k В/О С/П

Регистры

1;3 оперативные
2 k
7 ∓1

Время вычисления — $T = 3\,(x + 20)$ с.

Абсолютная погрешность вычисления $\Delta$ при $x \leqslant 11$ не превышает $1 \cdot 10^{-5}$.

*Примеры.* $x = 3$, $k = 2$. $\tilde{J}_2(3) = 0{,}48609$, $\tilde{I}_2(3) = 2{,}24521$; точные значения $J_2(3) = 0{,}48609126$, $\tilde{I}_2(3) = 2{,}2452125$.

### VI.2.2.1.2. Вычисление $J_k(x)$ и $I_k(x)$ при произвольном значении k

Для вычисления используются разложение $J_k(x)$ и $I_k(x)$ в ряд, перевод $\Gamma(z)$ в область $z > 9$ с помощью рекуррентного соотношения $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ и вычисление полученного $\Gamma(z)$ по формуле Стирлинга.

По программе вычисляется $J_k(x)$ или $I_k(x)$ в зависимости от предварительной установки в регистре памяти C соответственно — 1 или + 1.

Программа VI.2.2.1.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 0 | 40 | 25 | П→x 0 | 60 | 50 | F $e^x$ | 16 |
| 01 | ←→ | 14 | 26 | + | 10 | 51 | F π | 20 |
| 02 | 2 | 02 | 27 | × | 12 | 52 | 2 | 02 |
| 03 | : | 13 | 28 | F L3 | 5— | 53 | × | 12 |
| 04 | x→П 1 | 41 | 29 | 24 | 24 | 54 | П→x 3 | 63 |
| 05 | F $x^2$ | 22 | 30 | П→x 1 | 61 | 55 | × | 12 |
| 06 | П→x 1 | 61 | 31 | F ln | 18 | 56 | F √ | 21 |
| 07 | 9 | 09 | 32 | П→x 0 | 60 | 57 | : | 13 |
| 08 | x→П 3 | 43 | 33 | × | 12 | 58 | × | 12 |
| 09 | + | 10 | 34 | П→x 0 | 60 | 59 | С/П | 50 |
| 10 | x→П 2 | 42 | 35 | 9 | 09 | | | |
| 11 | П→x 2 | 62 | 36 | + | 10 | | Инструкция | |
| 12 | : | 13 | 37 | x→П 3 | 43 | В рег. С | —1 для J<br>+1 для I | |
| 13 | П→x 2 | 62 | 38 | F ln | 18 | | | |
| 14 | П→x 0 | 60 | 39 | 1 | 01 | | | |
| 15 | + | 10 | 40 | — | 11 | | x B↑ k B/O С/П | |
| 16 | : | 13 | 41 | П→x 3 | 63 | | | |
| 17 | П→x C | 6C | 42 | × | 12 | | Регистры | |
| 18 | × | 12 | 43 | — | 11 | | | |
| 19 | × | 12 | 44 | П→x 3 | 63 | 0 | k | |
| 20 | 1 | 01 | 45 | 1 | 01 | 1 | x/2 | |
| 21 | + | 10 | 46 | 2 | 02 | 2;3 | оперативные | |
| 22 | F L2 | 58 | 47 | × | 12 | C | —1 или 1 | |
| 23 | 11 | 11 | 48 | F 1/x | 23 | | | |
| 24 | П→x 3 | 63 | 49 | — | 11 | | | |

Время вычисления — $T = 3(x + 2 + |k|)$ с.

Абсолютная погрешность вычисления $\Delta$ при $x \leqslant 11$ не превышает $1 \cdot 10^{-5}$.

*Примеры.* $x = 3$, $k = 6$. $\tilde{J}_6(3) = 0{,}011394$, $\tilde{I}(3) = 0{,}021684$; точные значения $J_6(3) = 0{,}011394$, $I_6(3) = 0{,}021684$.

### VI.2.2.1.3. k — полуцелые

Вычисление $J_k(x)$ при полуцелых значениях k ($k = n + 1/2 \geqslant 3/2$) производится с использованием рекуррентного соотношения [13]

$$J_m(x) = \frac{2(m-1)}{x} \cdot J_{m-1}(x) - J_{m-2}(x), \quad m = {}^3/_2,\ {}^5/_2,\ {}^7/_2,\ \ldots$$

при $J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \cos x$, $J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \sin x$.

Программа VI.2.2.1.3/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P 3 | 31 | 31 | × | 26 | 62 | F 3 | 32 |
| 01 | ←→ | 16 | 32 | P 2 | 21 | 63 | 1 | 14 |
| 02 | P 2 | 21 | 33 | F 4 | 42 | 64 | — | 86 |
| 03 | F 1/x | 45 | 34 | ↑ | 06 | 65 | P 3 | 31 |
| 04 | P 4 | 41 | 35 | F 5 | 52 | 70 | 1 | 14 |
| 05 | 2 | 24 | 40 | -- | 86 | 71 | — | 86 |
| 10 | × | 26 | 41 | P 4 | 41 | 72 | P x<0 | 69 |
| 11 | P 5 | 51 | 42 | ↑ | 06 | 73 | 3 | 34 |
| 12 | ↑ | 06 | 43 | F 2 | 22 | 74 | F 2 | 22 |
| 13 | P π | 23 | 44 | × | 26 | 75 | С/П | 78 |
| 14 | : | 36 | 45 | ↑ | 06 | | | |
| 15 | F $\sqrt{}$ | 65 | 50 | P /—/ | 53 | | Инструкция | |
| 20 | ↑ | 06 | 51 | + | 96 | | | |
| 21 | F 2 | 22 | 52 | /—/ | 56 | x ↑ k В/О С/П | | |
| 22 | P cos | 83 | 53 | ↑ | 06 | | | |
| 23 | × | 26 | 54 | F 2 | 22 | | Регистры | |
| 24 | P , | 43 | 55 | P , | 43 | | | |
| 25 | F 2 | 22 | 60 | ←→ | 16 | 2 | J | |
| 30 | P sin | 93 | 61 | P 2 | 21 | 3—5 оперативные | | |

Программа VI.2.2.1.3/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 2 | 42 | 14 | F Bx | 0 | 28 | F L2 | 58 |
| 01 | ←→ | 14 | 15 | П→x 3 | 63 | 29 | 18 | 18 |
| 02 | x→П 3 | 43 | 16 | F sin | 1C | 30 | С/П | 50 |
| 03 | F cos | 1Г | 17 | × | 12 | | | |
| 04 | П→x 3 | 63 | 18 | x→П 3 | 43 | | Инструкция | |
| 05 | F 1/x | 23 | 19 | П→x 4 | 64 | | | |
| 06 | x→П 4 | 44 | 20 | П→x 1 | 61 | | Р/Г—в Р | |
| 07 | В↑ | 0E | 21 | — | 11 | | | |
| 08 | + | 10 | 22 | x→П 4 | 44 | x В↑ k В/О С/П | | |
| 09 | x→П 1 | 41 | 23 | × | 12 | | | |
| 10 | F π | 20 | 24 | + | 10 | | Регистры | |
| 11 | : | 13 | 25 | /—/ | 0L | | | |
| 12 | F $\sqrt{}$ | 21 | 26 | П→x 3 | 63 | 1 | 2/x | |
| 13 | × | 12 | 27 | ←→ | 14 | 2—4 оперативные | | |

Время вычисления — $T = (4k + 7)$ с.

*Пример.* $x = 2$, $k = 3{,}5$. $\tilde{J}_{7/2}(2) = 0{,}068517$; точное значение $J_{7/2}(2) = 0{,}068517$.

### VI.2.2.2. ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ-МАКДОНАЛЬДА

Функции Бесселя-Макдональда $K_n(x)$ связаны с функциями Бесселя $I_{\pm j}(x)$ предельным соотношением [13]

$$K_n(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \lim_{y \to n} \frac{I_{-y}(x) - I_y(x)}{\sin \pi y}.$$

### VI.2.2.2.1. Вычисление приближенного значения $K_0(x)$ (при $x \leqslant 12$, $2 \cdot 10^{-6} \leqslant K_0(x)$)

$\widetilde{K}_0(x)$ вычисляется с использованием соотношения [7]

$$\widetilde{K}_0(x) = e^{-1,03x} \ln\left[\frac{9}{8} \cdot \frac{1+1,2x+0,68\sqrt{x}}{x}\right].$$

Программа VI.2.2.2.1/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | P 2 | 21 | 22 | 8 | 84 | 44 | P ln | 13 |
| 01 | 1 | 14 | 23 | × | 26 | 45 | ↑ | 06 |
| 02 | , | 46 | 24 | ↑ | 06 | 50 | P /—/ | 53 |
| 03 | 0 | 04 | 25 | F 2 | 22 | 51 | : | 36 |
| 04 | 3 | 34 | 30 | F 1/x | 45 | 52 | С/П | 78 |
| 05 | × | 26 | 31 | + | 96 | | | |
| 10 | P $e^x$ | 33 | 32 | 1 | 14 | | Инструкция | |
| 11 | P , | 43 | 33 | , | 46 | | | |
| 12 | ←→ | 16 | 34 | 2 | 24 | | x В/О С/П | |
| 13 | F 1/x | 45 | 35 | + | 96 | | | |
| 14 | F √ | 65 | 40 | 9 | 94 | | Регистр | |
| 15 | 0 | 04 | 41 | × | 26 | | | |
| 20 | , | 46 | 42 | 8 | 84 | | 2 x | |
| 21 | 6 | 64 | 43 | : | 36 | | | |

Программа VI.2.2.2.1/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | В ↑ | 0E | 11 | . | 0— | 22 | 0 | 00 |
| 01 | F 1/x | 23 | 12 | 2 | 02 | 23 | 3 | 03 |
| 02 | В ↑ | 0E | 13 | + | 10 | 24 | × | 12 |
| 03 | F √ | 21 | 14 | 9 | 09 | 25 | F $e^x$ | 16 |
| 04 | 0 | 00 | 15 | × | 12 | 26 | : | 13 |
| 05 | . | 0— | 16 | 8 | 08 | 27 | С/П | 50 |
| 06 | 6 | 06 | 17 | : | 13 | | | |
| 07 | 8 | 08 | 18 | F ln | 18 | | Инструкция | |
| 08 | × | 12 | 19 | ←→ | 14 | | | |
| 09 | + | 10 | 20 | 1 | 01 | | x В/О С/П | |
| 10 | 1 | 01 | 21 | . | 0— | | | |

Время вычисления — 10 с.

Относительная погрешность вычисления $\delta$ не превышает 2 %.

*Пример.* x = 2. $\widetilde{K}_0(2)$ = 0,1143886; точное значение $K_0(2)$ = = 0,1138939.

### VI.2.2.2.2. Вычисление приближенного значения $K_1(x)$ (при $x \leqslant 12$; $2 \cdot 10^{-6} \leqslant K_1(x)$)

$\widetilde{K}_1(x)$ вычисляется с использованием соотношения [7]:

$$\widetilde{K}_1(x) = \frac{\sqrt{1 + x \ln 5}}{x} \cdot e^{-x}$$

Программа VI.2.2.2.2/21

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | ↑ | 06 | 11 | × | 26 | 22 | С П | 78 |
| 01 | P $e^x$ | 33 | 12 | 1 | 14 | | | |
| 02 | × | 26 | 13 | ÷ | 96 | | Инструкция | |
| 03 | P , | 43 | 14 | F √ | 65 | | | |
| 04 | ←→ | 16 | 15 | ↑ | 06 | | x В/О С П | |
| 05 | 5 | 54 | 20 | P /— | 53 | | | |
| 10 | P ln | 13 | 21 | : | 36 | | | |

Программа VI.2.2.2.2/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | F $e^x$ | 16 | 06 | F ln | 18 | 12 | С П | 50 |
| 01 | F Bx | 0 | 07 | × | 12 | | | |
| 02 | × | 12 | 08 | ÷ | 10 | | Инструкция | |
| 03 | 1 | 01 | 09 | F √ | 21 | | | |
| 04 | F Bx | 0 | 10 | ←→ | 14 | | x В/О С П | |
| 05 | 5 | 05 | 11 | : | 13 | | | |

Время вычисления — 7 с.

Относительная погрешность вычисления $\delta$ не превышает 2 %.

*Пример.* $x = 0{,}5$. $\widetilde{K}_1(0{,}5) = 1{,}6296$; точное значение $K(0{,}5) = 1{,}656441$.

### VI.2.2.2.3. Вычисление приближенного значения $K_n(x)$ при $n \geqslant 1$

$\widetilde{K}_n(x)$ вычисляется при $n \geqslant 1$ с использованием приведенных выше оценок $\widetilde{K}_0(x)$ и $\widetilde{K}_1(x)$ и рекуррентного соотношения [11]

$$K_{k+1}(x) = K_{k-1}(x) + \frac{2k}{x} K_k(x).$$

Программа VI.2.2.2.3/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 3 | 43 | 24 | ←→ | 14 | 48 | F Bx | 0 |
| 01 | Cx | 0Г | 25 | 1 | 01 | 49 | 2 | 02 |
| 02 | x→П 4 | 44 | 26 | . | 0— | 50 | × | 12 |
| 03 | ←→ | 14 | 27 | 0 | 00 | 51 | П→x 2 | 62 |
| 04 | x→П 2 | 42 | 28 | 3 | 03 | 52 | : | 13 |
| 05 | B↑ | 0E | 29 | × | 12 | 53 | К П→x 4 | Г4 |
| 06 | F 1/x | 23 | 30 | F $e^x$ | 16 | 54 | F . | 25 |
| 07 | 0 | 00 | 31 | : | 13 | 55 | П→x 4 | 64 |
| 08 | . | 0— | 32 | П→x 2 | 62 | 56 | × | 12 |
| 09 | 6 | 06 | 33 | F $e^x$ | 16 | 57 | + | 10 |
| 10 | 8 | 08 | 34 | F Bx | 0 | 58 | F L3 | 5— |
| 11 | F Bx | 0 | 35 | × | 12 | 59 | 47 | 47 |
| 12 | F √ | 21 | 36 | F Bx | 0 | 60 | С/П | 50 |
| 13 | : | 13 | 37 | 5 | 05 | | | |
| 14 | + | 10 | 38 | F ln | 18 | Инструкция | | |
| 15 | 1 | 01 | 39 | × | 12 | | | |
| 16 | . | 0— | 40 | 1 | 01 | x B↑ n B/O С/П | | |
| 17 | 2 | 02 | 41 | + | 10 | | | |
| 18 | − | 10 | 42 | F √ | 21 | Регистры | | |
| 19 | 9 | 09 | 43 | ←→ | 14 | | | |
| 20 | × | 12 | 44 | : | 13 | 2 x | | |
| 21 | 8 | 08 | 45 | БП | 51 | 3;4 оперативные | | |
| 22 | : | 13 | 46 | 58 | 58 | | | |
| 23 | F ln | 18 | 47 | ←→ | 14 | | | |

Время вычисления — $T = (4{,}5n + 15)$ с.

Относительная погрешность вычисления $\delta$ при $x \leqslant 10$, $n \leqslant 10$ не превышает 2 %.

*Пример.* $x = 2$. $n = 2$, $\check{K}_2(2) = 0{,}25338$; точное значение $K_2(2) = 0{,}25376$.

### VI.2.2.3. ФУНКЦИИ СТРУВЕ

Функции Струве $H_к(x)$ и $L_к(x)$ определяются из соотношений [28]:

$$H_k(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^k}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)} \cdot \int_0^{\pi/2} \sin(x\cdot\cos t)\cdot\sin^{2k} t\,dt, \qquad x>0$$

$$L_k(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^k}{\Gamma(k+1/2)} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sh}(x\cdot\cos t)\cdot\sin^{2k} t\,dt.$$

Вычисляются приближенные значения $\widetilde{H}_к(x)$ и $\widetilde{L}_к(x)$ при целых и полуцелых значениях k с помощью разложения в ряд [28]:

$$\widetilde{H}_k(x);\ \widetilde{L}_k(x) = \frac{x\left(\frac{x}{2}\right)^k}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(k+3/2)}\left[1+\sum_{i=1}^{N}\frac{(\mp x^2)^i}{(2i+1)!!}\prod_{m=0}^{i-1}\frac{1}{2k+2m+1}\right].$$

В правой части уравнения знак минус относится к $\widetilde{H}_к(x)$, а знак плюс относится к $\widetilde{L}_k(x)$.

По программе вычисляется $\widetilde{H}_k(x)$ или $\widetilde{L}_к(x)$ в зависимости от предварительной установки соответственно — 1 или + 1 в регистре памяти С.

Программа VI.2.2.3/54,52

| Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код | Адрес | Команда | Код |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 00 | x→П 0 | 40 | 24 | ←→ | 14 | 48 | П→x 0 | 60 |
| 01 | 1 | 01 | 25 | 1 | 01 | 49 | + | 10 |
| 02 | + | 10 | 26 | — | 11 | 50 | : | 13 |
| 03 | x→П 2 | 42 | 27 | : | 13 | 51 | П→x C | 6C |
| 04 | 2 | 02 | 28 | F Bx | 0 | 52 | × | 12 |
| 05 | F 1/x | 23 | 29 | F L2 | 58 | 53 | 1 | 01 |
| 06 | + | 10 | 30 | 25 | 25 | 54 | + | 10 |
| 07 | ←→ | 14 | 31 | F 1/x | 23 | 55 | F L1 | 5L |
| 08 | B ↑ | 0E | 32 | F π | 20 | 56 | 39 | 39 |
| 09 | B ↑ | 0E | 33 | F ln | 18 | 57 | × | 12 |
| 10 | + | 10 | 34 | × | 12 | 58 | С/П | 50 |
| 11 | 3 | 03 | 35 | F $e^x$ | 16 | | | |
| 12 | + | 10 | 36 | F √ | 21 | | Инструкция | |
| 13 | x→П 1 | 41 | 37 | : | 13 | | | |
| 14 | F . | 25 | 38 | 1 | 01 | | В рег. С { —1 для H; +1 для L | |
| 15 | 2 | 02 | 39 | П→x 3 | 63 | | | |
| 16 | : | 13 | 40 | F $x^2$ | 22 | | x B ↑ к В/О С/П | |
| 17 | x→П 3 | 43 | 41 | × | 12 | | | |
| 18 | F ln | 18 | 42 | П→x 1 | 61 | | Регистры | |
| 19 | П→x 2 | 62 | 43 | 2 | 02 | | | |
| 20 | × | 12 | 44 | F 1/x | 23 | | 0 к | |
| 21 | F $e^x$ | 16 | 45 | + | 10 | | 1;2 оперативные | |
| 22 | 2 | 02 | 46 | : | 13 | | 3 x/2 | |
| 23 | × | 12 | 47 | F Bx | 0 | | С —1 или 1 | |

Время вычисления — $T = (12x + 2к + 35)$ с.

Абсолютная погрешность вычисления $\Delta$ не превышает $2\cdot10^{-5}$ при $x \leqslant 10$ и $2\cdot10^{-4}$ при $x \leqslant 13$.

*Примеры.* $x = \pi$, $к = 1/2$. $\widetilde{H}_{1/2}(\pi) = 0{,}90031651$, $\widetilde{L}_{1/2}(\pi) = 4{,}7680542$; точные значения $H_{1/2}(\pi) = 0{,}90031629$, $L_{1/2}(\pi) = 4{,}7680539$.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Особенности выполнения некоторых операций, использованные при составлении программ .../54 и .../52.

1. Команда $Fx^y$ дает иногда неверный результат. Вместо нее используются операции $e^{y\ln x}$ или $10^{y\lg x}$.

2. Команды К x → П B↑ и К П → x B↑ аналогичны командам соответственно Кx → П0 и КП → x0, отличаясь, однако, тем, что из содержимого регистра 0 единица не вычитается.

3. При аварийном останове продолжение счета командой С/П сохраняет предыдущее содержимое регистра X, но приводит к пропуску одной команды.

4. Команда В/О, помещенная вне подпрограммы, осуществляет безусловный переход по адресу 01.

5. Команды Кx → ПN и КП → xN (N = 0—6) в случае, если содержимое a регистра N по модулю меньше 1, уменьшает (при N = 0 —3) или увеличивает (при N = 4—6) величину /a/ на величину δ (δ < 1) в зависимости от a.

6. Зависимость результатов вычисления тригонометрических функций от установки переключателя Р/Г позволяет создавать программы вычисления двух вариантов одной и той же задачи при различном положении переключателя Р/Г.

7. Последовательное выполнение команд F cos и $F\cos^{-1}$ в зависимости от установки переключателя Р/Г обращает содержимое x регистра X в 0 при следующих исходных значениях x: при $|x| < 2{,}1\cdot10^{-4}$ (Р/Г в Р) или при $|x| < 1{,}2\cdot10^{-2}$ (Р/Г в Г).

8. Последовательное выполнение прямой и обратной функции (например, $Ftg^{-1}$ Ftg или $FlnFe^x$) приводит в некоторых диапазонах исходных значений x к относительно малому изменению x (уменьшению или увеличению).

## ЛИТЕРАТУРА


1. Микрокалькулятор «Электроника Б3-21».— Инструкция по эксплуатации.

2. Микрокалькулятор «Электроника Б3-34». — Инструкция по эксплуатации.

3. Микрокалькулятор «Электроника МК-54». — Инструкция по эксплуатации.

4. Микрокалькулятор «Электроника МК-52». — Инструкция по эксплуатации.

5. Микрокалькулятор «Электроника МК-61». — Инструкция по эксплуатации.

6. Цветков А. Н. Прикладные программы для микроЭВМ «Электроника Б3-21». — М.: Финансы и статистика, 1982.

7. Цветков А. Н., Епанечников В. А. Прикладные программы для микроЭВМ «Электроника Б3-34», «Электроника МК-56», «Электроника МК-54»— — М.: Финансы и статистика, 1984.

8. Цветков А. Н., Епанечников В. А. Прикладные программы для микрокалькулятора «Электроника Б3-34». — М., 1982 (Препринт/ ИРЭ АН СССР; № 19 (346)).

9. Цветков А. Н. Сглаживание экспериментальных зависимостей с помощью микрокалькулятора «Электроника Б3-34». — М., 1982 (Препринт/ ИРЭ АН СССР; № 20 (347)).

10. Епанечников В. А. Прикладные программы для расчета специальных функций на микрокалькуляторе «Электроника Б3-34». — М., 1982 (Препринт/ ИРЭ АН СССР; № 27 (354)).

11. Справочник по специальным функциям /Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган.— М.: Наука, 1979.

12. Форсайт Дж., Мальколь м М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. — М.: Мир, 1980.

13. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике. — М.: Наука, 1986.

14. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. — М.: Наука, 1977.

15. Демидович Б. П., Марон И. А., Основы вычислительной математики. — М.: Наука, 1970.

16. Романовский П. И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа. — М.: Наука, 1980.

17. Выгодский М. Я. Справочник по элементарной математике. — М.: Физматгиз, 1969.

18. Бусленко Н. П., Шрейдер Ю. А. Метод статистических испытаний. — М.: Физ-мат. лит, 1961.

19. Крамер Г. Математические методы статистики. — М.: Мир, 1976.

20. Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. — М.: Наука, 1983.

21. Цветков А. Н. Искусство программирования программируемых микрокалькуляторов //Изв. вузов МВ и ССО СССР. Сер. Радиоэлектроника. — — Киев, 1984. — Т. XXVII. — № 8.

22. Дунин-Барковский И. В., Смирнов Н. В. Теория вероятностей и математическая статистика в технике. — М.: ГИТЛ, 1955.

23. Ван дер Варден Б. Л. Математическая статистика. — М.: Иностранная литература, 1960.

24. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. — М.: Наука, 1969.

25. Епанечников В. А. Уровень значимости и мощность двустороннего критерия Колмогорова при малых объемах выборок // Теория вероятностей и ее применения. — М. 1968. — Т.13. — Вып. 4.

26. Загнидзе И. Г. Планирование эксперимента для исследования многокомпонентных систем. — М.: Наука, 1976.

27. Бейли Н. Статистические методы в биологии. — М.: Мир, 1963.

28. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1971.

29. Lewin L. Dilogarithms and associated functions. — London: Macdonald, 1958.

30. Кендалл М., Стьюарт А. Статистические выводы и связи. — М.: Наука, 1973.

31. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ/Т.II, Получисленные алгоритмы.— М.: Мир, 1977.

32. Аптон Г. Анализ таблиц сопряженности. — М.: Финансы и статистика, 1982.

33. Хастингс Н., Пикок Дж. Справочник по статистическим распределениям. — М.: Статистика, 1980.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение . . . . . 3

*Глава I.* АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ . . . . . 5

I. 1. Перевод чисел из одной системы счисления в другую . . . 5
I. 1.1. Перевод целых чисел . . . . . 5
I. 1.2. Перевод дробных чисел . . . . . 7
I. 1.3. Перевод действительных чисел . . . . . 10
I. 2. Непрерывные (цепные) дроби . . . . . 12
I. 2.1. Преобразование действительных чисел в цепную дробь 12
I. 2.2. Преобразование цепной дроби в действительное число 13
I.3. Деление чисел с произвольной точностью . . . . . 15
I. 3.1. Представление результата в виде числа с плавающей запятой . . . . . 15
I. 3.2. Естественное представление результата . . . . . 16
I.4. Решение алгебраических уравнений . . . . . 17
I. 4.1. Решение квадратного уравнения . . . . . 17
I.4.2. Решение кубического уравнения . . . . . 18
I. 4.3. Решение системы двух линейных уравнений . . . . 20
I. 4.4. Решение системы трех линейных уравнений . . . . . 22
I. 4.5. Решение системы четырех линейных уравнений . . . . 22
I. 4.6. Решение уравнения $f(x) = 0$ . . . . . 24
I. 4.7. Решение системы трансцендентных уравнений . . . . 29
I.5. Элементы линейной алгебры . . . . . 31
I.5.1. Вычисление детерминантов . . . . . 31
I. 5.2. Обращение матриц . . . . . 35
I.5.3. Умножение матриц . . . . . 39
I. 5.4. Векторное произведение двух векторов . . . . . 43
I.6. Суммы и произведения . . . . . 44
I.6.1. Сумма степеней чисел натурального ряда . . . . . 44
I. 6.2. Факториал . . . . . 44
I.6.3. Сумма факториалов . . . . . 45
I. 6.4. Произведение факториалов . . . . . 45
I. 6.5. Функция n !! . . . . . 46
I. 6.6. Размещения . . . . . 46
I. 6.7. Сочетания . . . . . 47
I. 6.8. Мультиномиальные коэффициенты . . . . . 49
I.7. Функции комплексной переменной . . . . . 50
I.7.1. Арифметические действия, возведение в степень . . . . . 50
1.7.2. Тригонометрические и гиперболические функции, экспонента, логарифм . . . . . 53
I. 7.3. Обратные тригонометрические и гиперболические функции . . . . . 57

*Глава II.* ТРИГОНОМЕТРИЯ И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ . 59

II.1. Преобразование координат . . . . . 59
II. 1.1. Перенос и поворот декартовых осей координат . . . 59
II.1.2. Переход от декартовых координат к полярным . . . . . 61
II. 1.3. Переход от полярных координат к декартовым . . . 63
II.2. Решение треугольников . . . . . 64
II.2.1. По трем сторонам . . . . . 64
II.2.2. По двум сторонам и углу между ними . . . . . 65
II.2.3. По двум сторонам и углу против одной из них . . 66
II.2.4. По двум углам и стороне между ними . . . . . 68
II.2.5. По двум углам и стороне против одного из них . . . . 68
II.3. Вычисление расстояний. . . . . 69
II. 3.1. От точки до плоскости . . . . . 69
II 3.2. Расстояние между параллельными плоскостями . . . . . 71

II.4. Спектральный анализ . . . . . 72
II.4.1. Определение первых четырех гармоник функции f (t) . 73
II.4.2. Определение m-й гармоники . . . . . 74
II.4.3. Синтез функции в одной точке . . . . . 75
II.4.4. Синтез функции f (t) по шести гармоникам . . . . . 77
II.5. Гиперболические и обратные гиперболические функции 78
II.5.1. Гиперболические функции . . . . . 78
II.5.2. Обратные гиперболические функции . . . . . 78

*Глава III.* ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ. . . . . 80

III. 1. Интерполяция . . . . . 80
III.1.1. Интерполяция функцией одной переменной . . . . . 80
III.1.2. Интерполяция плоскостью . . . . . 89
III.2. Нахождение экстремума функции . . . . . 90
III.2.1. Функция одной переменной . . . . . 90
III.2.2. Функция двух переменных . . . . . 92
III.3. Интегрирование . . . . . 94
III.3.1. Интегрирование функции, заданной аналитически 94
III.3.2. Интегрирование функции, заданной таблично . . . . 99
III.4. Решение дифференциальных уравнений . . . . . 101
III.4.1. Уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$ . . . . . 102
III.4.2. Система уравнений первого порядка . . . . . 104
III.4.3. Уравнения высших порядков . . . . . 112

*Глава IV.* СГЛАЖИВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ . . . . . 120

IV. 1. Сглаживание функцией с одним неизвестным параметром 121
IV. 1.1. Прямая с заданным наклоном (угловым коэффициентом k) . . . . . 121
IV. 1.2. Функция с неизвестным множителем . . . . . 122
IV.1.3. Функция с неизвестным слагаемым . . . . . 124
IV.1.4. Произвольная непрерывная функция . . . . . 126
IV.2. Сглаживание функцией с двумя неизвестными параметрами . . 135
IV.2.1. Прямая . . . . . 135
IV. 2.2. Функция, линейно зависящая от параметров . . . . . 136
IV. 2.3. Степенная функция . . . . . 139
IV. 2.4. Экспоненциальная функция . . . . . 143
IV. 2.5. Произвольная непрерывная функция . . . . . 144
IV. 3. Сглаживание функцией с тремя неизвестными параметрами 151
IV. 3.1. Парабола . . . . . 151
IV. 3.2. Функция, линейно зависящая от параметров . . . . . 153
IV. 3.3. Плоскость . . . . . 156
IV. 3.4. Произвольная непрерывная функция . . . . . 157
IV. 4. Вычисление значений многочлена . . . . . 160
IV. 4.1. Действительное x . . . . . 161
IV. 4.2. Комплексное x . . . . . 163

*Глава V.* СТАТИСТИКА . . . . . 169

V.1. Моменты выборочного распределения . . . . . 169
V.1.1. Среднее и дисперсия . . . . . 169
V.1.2. Четыре первых центральных момента, асимметрия и эксцесс . . . . . 170
V.1.3. Моменты, асимметрия и эксцесс выборки, сгруппированной в классы . . . . . 173
V.2. Гистограмма . . . . . 176
V.2.1. Гистограмма ($k_{max} = 11$ или 12 интервалов) . . . . . 176
V.2.2. Гистограмма ($k_{max} = 22$ интервала) . . . . . 177

V.3. Мера отклонения $\chi^2$ . . . . . 179
V.3.1. С вводом n. . . . . 179
V. 3.2. Без ввода n . . . . . 180
V.4. Проверка статистических гипотез . . . . . 181
V.4.1. Проверка гипотезы о равенстве средних . . . . . 181
V.4.2. Проверка гипотезы о величине разности между средними двух выборок . . . . . 182
V.4.3. Проверка гипотезы о равенстве среднего заданному числу 184
V. 4.4. Проверка гипотезы о равенстве вероятностей двух редких событий . . . . . 185
V.4.5. Проверка гипотезы о равенстве вероятности заданному числу . . . . . 186
V.4.6. Проверка гипотезы об однородности двух выборок . . 187
V.4.7. Проверка гипотезы нормальности по величинам асимметрии и эксцесса . . . . . 190
V.4.8. Проверка гипотезы нормальности по критерию $\chi^2$ . . 190
V. 4.9. Критерий знаков . . . . . 193
V.4.10. Критерий Вилкоксона . . . . . 194
V.4.11. Критерий Аббе . . . . . 200
V.4.12. Критерий серий . . . . . 202
V.4.13. Критерий Колмогорова . . . . . 203
V.4.14. Критерий Смирнова . . . . . 206
V.4.15. Проверка независимости двух признаков (анализ таблицы $2\times2$) . . . . . 207
V.4.16. Вычисление доверительного интервала для неизвестной вероятности по частоте . . . . . 216
V.5. Распределение вероятностей . . . . . 218
V.5.1. Биномиальный закон . . . . . 218
V.5.2. Распределение Пуассона . . . . . 221
V.5.3. Нормальное распределение . . . . . 223
V.5.4. $\chi^2$-распределение . . . . . 233
V.5.5. Распределение Стьюдента . . . . . 237
V.5.6. *r*-распределение . . . . . 240
V.5.7. *F*-распределение . . . . . 242
V.6. Генерация псевдослучайных чисел . . . . . 246
V.6.1. Равномерное распределение . . . . . 246
V.6.2. Нормальное распределение . . . . . 249
V.6.3. Распределение Пуассона . . . . . 251
V.6.4. Распределение Рэлея. . . . . 252
V.7. Статистический анализ . . . . . 254
V. 7.1. Корреляционный и регрессионный анализ . . . . . 254
V.7.2. Дисперсионный анализ . . . . . 261
V.7.3. Дискриминационный анализ . . . . . 263
V.7.4. Метод конкордации . . . . . 266

Глава VI. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ . . . . . 269

VI.1. Специальные функции общего назначения . . . . . 269

VI. 1.1 Интегральные функции . . . . . 269
VI.1.2. Ортогональные полиномы. . . . . 286
VI. 1.3. Функции Эйри . . . . . 294
VI. 1.4. Гипергеометрические функции . . . . . 295
VI.2. Специальные функции для статистических расчетов . . . . 298
VI.2.1. Гамма-функция и родственные ей функции . . . . . 298
VI. 2.2. Функции Бесселя и связанные с ними функции . . . . 308

Приложение . . . . . 316

Литература . . . . . 316